



Titre: Développement d'un outil multi-approches pour la modélisation
numérique du phénomène de coup de bélier

Auteur: Aboudou Seck
Author:

Date: 2017

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Seck, A. (2017). Développement d'un outil multi-approches pour la modélisation
numérique du phénomène de coup de bélier [Thèse de doctorat, École
Citation: Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2509/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/2509/>
PolyPublie URL:

**Directeurs de
recherche:** Musandji Fuamba
Advisors:

Programme: Génie civil
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL MULTI-APPROCHES POUR LA MODÉLISATION
NUMÉRIQUE DU PHÉNOMÈNE DE COUP DE BÉLIER

ABOUDOU SECK

DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR
(GÉNIE CIVIL)

AVRIL 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

DÉVELOPPEMENT D'UN OUTIL MULTI-APPROCHES POUR LA MODÉLISATION
NUMÉRIQUE DU PHÉNOMÈNE DE COUP DE BÉLIER

présentée par : SECK Aboudou

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. MAHDI Tew-Fik, Ph. D., président

M. FUAMBA Musandji, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. SHAKIBAEINIA Ahmad, Ph. D., membre

M. NZAKIMUENA Tonino-J., Ph. D., membre

DÉDICACE

À mon fils Aliou Seck

À mes parents et ma famille

À toute la jeunesse.

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier chaleureusement mon Directeur de recherche le Professeur Musandji Fuamba, pour ses conseils avisés tout au long de mon cheminement au deuxième et troisième cycle à l'École Polytechnique de Montréal. Je le remercie aussi pour la confiance qu'il a bien voulu placée en moi dans les travaux de recherches avec les industries Béton Brunet Ltée et Les Technologies Sonitec-Vortisand Inc. et pour les charges de cours qu'il m'a confiées.

Je salue la disponibilité des membres du jury pour l'évaluation de cette thèse.

À Aliou Seck (Bada) j'exprime ma profonde gratitude pour son soutien financier pendant mes études secondaires et le premier cycle universitaire.

Merci à Ibrahima Gueye de l'Organisation des Nations Unies (ONU) pour ses encouragements sans cesse renouvelés.

Je remercie Anas Sebti Ph.D., Essoyéké Batchabani Ph.D. et Dr Papa Mourath Diaw pour la relecture de cette thèse.

Un grand merci à tous les collègues pour les discussions scientifiques animées et le soutien moral : Samba Bousso, Carl Gagnon-Ouellette, Ble Jean Fidele Yrro et Youssef Bentaiebi. Merci à mes amis Raoul, Emmanuel et Stéphane.

Mes remerciements vont aussi à l'endroit du Conseil de Recherches en Sciences Naturelles et en Génie (CRSNG) et du Fonds de Recherche du Québec - Nature et Technologies (FRQNT) pour les bourses d'excellence qui m'ont été attribuées.

J'exprime ma reconnaissance auprès de l'Association des Étudiants de Polytechnique (AEP), des comités à l'éducation et à l'ensemble des étudiants du département des génies civil, géologique et des mines de Polytechnique de Montréal pour les distinctions lors du gala Méritas des années 2014-2015-2016 soulignant la qualité de mon enseignement.

Mention spéciale à mes parents, à Fatou Samb et à toute ma famille pour le soutien inconditionnel et les prières formulées.

RÉSUMÉ

Le coup de bélier est un phénomène de surpression qui apparaît au moment de la variation brusque de la vitesse d'un fluide, à la suite d'une fermeture/ouverture rapide d'une vanne ou du démarrage/arrêt d'une turbine ou d'une pompe. Les conditions d'écoulement sont alors instantanément modifiées à travers les fluctuations de pression, provoquant ainsi une mise en accélération très rapide du fluide. Le dépassement de la pression admissible qui en découle est souvent à l'origine de la rupture des conduites et des bris d'équipements dans les réseaux de conduites des centrales hydroélectriques, des aqueducs et des stations de pompage; ce qui a une incidence sur la sécurité, les coûts d'entretien, de maintenance et d'exploitation.

Dans la phase d'avant-projet, lors de la conception préliminaire des équipements de prévention et/ou d'atténuation des pressions excessives causées par le coup de bélier, les ingénieurs utilisent des équations simplifiées qui donnent des solutions analytiques. Dans la phase de conception détaillée des systèmes de canalisations, la modélisation précise de la surpression devient très importante dans le choix des caractéristiques des conduites et dans le choix structurel des moyens de mitigation de l'onde de choc. La conception détaillée tente en outre de caractériser la réponse réelle et complète du système face aux coups de bélier en utilisant divers outils tels que la modélisation numérique.

L'objectif général de ces travaux de recherche est de proposer aux ingénieurs et praticiens une nouvelle approche fonctionnelle, décisionnelle et inclusive qui leur permettra, à chaque étape d'un projet, de mieux modéliser un coup de bélier. Cette thèse propose **i)** des abaques afin d'améliorer l'efficacité et réduire le temps de calcul dans la conception préliminaire d'une cheminée d'équilibre installée sur une conduite devant faire face à la surpression, et **ii)** deux algorithmes à travers des modèles numériques en volume fini développés avec des variables conservatives. Le premier algorithme prend en compte la friction dynamique pendant le phénomène de propagation du coup de bélier dans une conduite, et le second algorithme prend en compte la réponse du matériau des parois de la conduite via sa viscoélasticité pendant le choc.

Pour des besoins de conception préliminaire, des équations analytiques ont été dérivées dans cette thèse (chapitre 4), pour la conception des cheminées d'équilibre cylindriques et coniques. Des diagrammes simples et conviviaux ont été élaborés comme solutions des équations développées. Une démonstration de l'efficacité de ces diagrammes a montré que des solutions obtenues par la

méthode classique d'approximation successive nécessitaient 26 itérations de calculs complexes, tandis qu'une lecture simple sur le diagramme aurait suffi avec une précision de plus de 99,2%. L'utilisation des diagrammes pour servir à la conception préliminaire des réservoirs d'équilibre fait gagner du temps et augmenter l'efficacité dans la productivité, tout en réduisant les erreurs de calcul.

Dans la phase de conception détaillée, bien que dérivée des principes de conservation de la masse et de la quantité de mouvement, les équations régissant les coups de bélier intégrant la friction dynamique et incorporant le comportement viscoélastique de la paroi de la conduite n'ont jamais été exprimées avec des variables conservatives. La pression et le débit volumique, utilisés comme variables dans les formulations classiques, ne sont pas des quantités conservées. Cette recherche présente, dans ses deux dernières parties (chapitres 5 et 6), la dérivation et la résolution numérique des équations descriptives du coup de bélier, tout en utilisant une formulation de volume fini sous sa forme conservative intégrant la friction dynamique, puis le comportement viscoélastique de la paroi de la conduite. Les systèmes hyperboliques qui en découlent admettent des solutions faibles sous la forme de discontinuités ou de «chocs». Le traitement de ces discontinuités a nécessité une caractérisation particulière de la fonction de flux, pour éviter des oscillations parasites. Des algorithmes de calcul robustes, simples, précis et rapides basés sur le schéma de Godunov pour les systèmes hyperboliques unidimensionnels y sont présentés en détail.

La prise en compte de la composante non-permanente de la friction dynamique a fait apparaître un terme source hyperbolique dans la formulation conservative des équations du coup de bélier; ce qui réduit les pics de pression en offrant une meilleure concordance pour les conduites rigides, comparativement à l'hypothèse du frottement quasi-permanent. Deux études de cas sont utilisées pour illustrer l'influence des différentes formulations. Une étude comparative entre d'une part la solution analytique, la solution numérique avec friction quasi-permanente, la solution numérique avec friction dynamique et d'autre part les mesures expérimentales montre la pertinence d'inclure le terme de frottement dynamique dans la formulation des équations du coup de bélier, étant donné la meilleure concordance trouvée entre les valeurs simulées et mesurées.

La prise en compte de la viscoélasticité des parois de la conduite fait apparaître un nouveau paramètre dans le terme source de l'équation de conservation de masse du système hyperbolique des lois de conservation régissant les coups de bélier. Une étude de cas a été présentée pour

comparer les impacts distincts sur l'atténuation des ondes de choc dans le temps. Les résultats indiquent que l'inclusion de la viscoélasticité provoque un retard de la propagation de l'onde, réduit les pics de pressions plus rapidement et offre une parfaite concordance avec des valeurs expérimentales. Le modèle développé est capable de prédire de manière satisfaisante les surpressions induites par les coups de bélier dans une conduite viscoélastique.

Les robustes algorithmes développés et proposés pour la modélisation numérique en volume fini des équations à variables conservatives des coups de bélier sont précis, rapides en plus d'offrir la possibilité aux ingénieurs de considérer plusieurs variantes dans un court laps de temps de calcul, en phase d'études détaillées.

ABSTRACT

A water hammer is defined as a pressure surge or wave caused when a fluid in motion is suddenly forced to stop or change directions. Water hammers usually occur when the flow of water into a turbine or pump decreases rapidly due to a sudden drop in the pressure head, or when a valve is suddenly closed at an end of a pipeline system. Water hammer can cause pipelines, hydroelectric plants and pumping system to break if the pressure is high enough; that has an impact on the cost of maintenance and operation. In the preliminary design of hydraulic systems, practicing engineers use a general framework to design equipment to prevent and/or mitigate any excessive pressures caused by water-hammer. In the detailed design of pipeline systems, water-hammer analysis is very important to select pipe characteristics and to specify surge control to prevent and/or mitigate any excessive pressures. The detailed design further attempts to elaborate the complete system response using various tools such as numerical modeling.

The main objective of this research is to propose a new functional, decision-making and inclusive approach that allows each step of a project to better modeling a water-hammer for engineering applications.

This research **i)** bridges the gap between the design concept and the detailed design phase on surge tanks by providing user friendly diagrams for the design of cylindrical and conical open surge tanks, and **ii)** helps practical engineers who are at the detailed design phase, to further safely optimize any incorporated surge controls by assisting in the development and numerical simulation of the water-hammer equations with dynamic friction, and with viscoelastic behaviour of the pipe-wall.

In the primary design phase, analytical equations have been introduced and developed that can be used to design cylindrical and conical surge tanks, with accompanying charts that were based on the developed equations. A demonstration of the effectiveness of the charts was also shown that solutions obtained via successive approximation method required 26 iterations of complex calculations, while a simple reading on the chart would have sufficed to more than 99.2% accuracy. Using the charts to help design the surge tanks were proven to help save time and increase efficiency, while reducing calculation errors.

In the detailed design phase, although derived from the principles of conservation of mass and momentum, the water-hammer equations integrating dynamic friction, and incorporating

viscoelastic behaviour of the pipe-wall are almost never expressed in conservation form. This is because the pressure and volume discharge are used as variables but these are not conserved quantities. This research presents also the derivation of the water-hammer equations in conservation form with dynamic friction, and with viscoelastic behaviour of the pipe-wall. Hyperbolic systems admit weak solutions in the form of discontinuities or ‘shocks’. The treatment of these discontinuities requires special treatment of the flux function to avoid spurious oscillations.

The water-hammer equations in conservation form incorporating dynamic friction, and viscoelastic behaviour of the pipe-wall are developed and numerically solved using a finite volume formulation for engineering applications. Robust, simple, accurate and fast computational algorithms based on the Godunov scheme for one-dimensional hyperbolic systems are presented in some detail.

Introduction of the dynamic friction results in the appearance of a source term in the hyperbolic system of governing partial differential equations. The findings indicate that inclusion of the dynamic friction reduces the peak water-hammer pressures when compared with the standard quasi-steady assumption for the friction. Two case studies are used to illustrate the influence of the various formulations. A comparative study between the analytical solution, the numerical solution with quasi-steady friction only, the numerical solution with dynamic friction, and the measurements has been presented. The inclusion of the dynamic friction results in a better agreement between calculated and measured values.

Introduction of the viscoelastic behaviour of the pipe-wall results in the appearance of a new term in the mass conservation part of the source term in the hyperbolic system of governing partial differential equations. One case study has been presented to compare the separate impacts on wave attenuation with time. The findings indicate as expected, inclusion of viscoelasticity reduces the peak water-hammer pressures. The model developed appears to be capable of satisfactorily predicting transient pressures in a viscoelastic pipe.

The robust computational algorithms introduced and developed, based on the Godunov scheme for one-dimensional hyperbolic systems, are simple, accurate and fast. Thus, several variants may be studied in a short period, in the detailed design phase.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE.....	III
REMERCIEMENTS	IV
RÉSUMÉ.....	V
ABSTRACT	VIII
TABLE DES MATIÈRES	X
LISTE DES TABLEAUX.....	XIV
LISTE DES FIGURES	XV
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	XVII
CHAPITRE 1 INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 2 REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE	5
2.1 Les cheminées (ou réservoirs) d'équilibre	5
2.2 Les développements dans la modélisation du coup de bélier avec la prise en compte de la friction dynamique	6
2.3 Les développements dans la modélisation du coup de bélier avec la prise en compte de la viscoélasticité des parois de la conduite.....	7
2.4 Les développements dans la modélisation et l'implémentation du coup de bélier avec des variables conservatives.....	8
CHAPITRE 3 DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL DE RECHERCHE ET ORGANISATION GÉNÉRALE DU DOCUMENT INDIQUANT LA COHÉRENCE DES ARTICLES PAR RAPPORT AUX OBJECTIFS DE LA RECHERCHE	9
3.1 Méthodologie	9
3.2 Organisation	10
CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : CONTRIBUTION TO THE ANALYTICAL EQUATION RESOLUTION USING CHARTS FOR ANALYSIS AND DESIGN OF CYLINDRICAL AND CONICAL OPEN SURGE TANKS	13

4.1	Abstract	13
4.2	Introduction	14
4.3	Methodology	16
4.4	Governing Equations.....	16
4.4.1	First-order non-homogeneous differential equation ODE with variable coefficients	16
4.4.2	Solution of ODE.....	19
4.4.3	Solving ODE with initial-value and final-value constraints	20
4.5	Charts	23
4.6	Case Study.....	29
4.6.1	Application examples.....	29
4.6.2	Solutions using charts versus by successive approximation method	29
4.7	Conclusions and recommendations.....	32
4.8	Notation.....	33
CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : FINITE VOLUME SOLUTIONS TO THE WATER-HAMMER EQUATIONS IN CONSERVATION FORM INCORPORATING DYNAMIC FRICTION USING THE GODUNOV SCHEME		34
5.1	Abstract	34
5.2	Introduction	35
5.3	Methodology	37
5.4	Governing Equations.....	38
5.5	Numerical solution	41
5.5.1	Guinot's solutions at the internal cells and at the boundaries for the conservation terms.....	41
5.5.2	Solution for the hyperbolic source term at the internal cells.....	43
5.5.3	Discretization of the non-hyperbolic source term	45

5.5.4	Computational time step.....	45
5.5.5	Water-hammer wave attenuation ratio	46
5.5.6	Resolution algorithm	46
5.6	Results and discussion.....	47
5.6.1	Case 1: Sudden opening of an upstream valve.....	48
5.6.2	Case 2: Sudden closure of a downstream valve	51
5.7	Conclusions and Recommendations.....	57
5.8	Acknowledgments	57
5.9	Notation	58
CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : FINITE VOLUME SOLUTIONS TO THE WATER-HAMMER EQUATIONS IN CONSERVATION FORM INCORPORATING VISCOELASTIC BEHAVIOUR OF THE PIPE-WALL USING THE GODUNOV SCHEME.....		60
6.1	Abstract	60
6.2	Introduction	61
6.3	Methodology	62
6.4	Classical derivation from the conservation of mass and momentum.....	63
6.5	Incorporation of the viscoelastic behaviour of the pipe-wall	63
6.6	Numerical solution	66
6.6.1	Guinot's solutions at the internal cells and at the boundaries for Eq. (6-13).....	66
6.6.2	Discretization of the source term	68
6.6.3	Computational time step.....	71
6.7	Resolution algorithm	71
6.8	Application	72
6.8.1	Experimental setup.....	72
6.8.2	Results and Discussion.....	73

6.9	Conclusions and Recommendations.....	75
6.10	Acknowledgments.....	76
6.11	Notation.....	77
CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE		79
CHAPITRE 8 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS		82
8.1	Conclusions générales	82
8.2	Contributions scientifiques avec comité de lecture	83
8.3	Recommandations	83
8.3.1	Les pistes de développement futurs	83
8.3.2	Les limites des travaux	84
BIBLIOGRAPHIE		85
ANNEXES		89

LISTE DES TABLEAUX

Table 4.1: Precision of the reading chart in the case study	32
---	----

LISTE DES FIGURES

Figure 4.1: Definition sketch for surge tank analysis.....	17
Figure 4.2: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0$	24
Figure 4.3: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.001$	24
Figure 4.4: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.01$	25
Figure 4.5: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.02$	25
Figure 4.6: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.03$	26
Figure 4.7: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.04$	26
Figure 4.8: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.05$	27
Figure 4.9: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.1$	27
Figure 4.10: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.2$	28
Figure 4.11: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.2$	28
Figure 5.1: Schematic of the proposed algorithm	47
Figure 5.2: Comparison of pressure profiles at pipe midpoint ($\Delta t = 0.0002$ s, $N = 50$) between the various formulations for the friction term	49
Figure 5.3: Comparison of discharge profiles ($\Delta t = 0.0002$ s, $N = 50$) between the various formulations for the friction term: a) pipe midpoint; b) downstream of the reservoir.....	50
Figure 5.4: Test No 1: Comparison of pressure profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #2; b) section #3	53
Figure 5.5: Test No 1: Comparison of discharge profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #1; b) section #2.....	54
Figure 5.6: Test No 2: Comparison of pressure profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #2; b) section #3	55
Figure 5.7: Test No 2: Comparison of discharge profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #1; b) section #2.....	56
Figure 6.1: Generalized Kelvin-Voigt model of viscoelastic behaviour of structure	69

Figure 6.2: Schematic of the proposed algorithm	72
Figure 6.3: Pressure profiles ($\Delta t = 0.0008$ s, $N = 100$ cells) at location #1	74
Figure 6.4: Pressure profiles ($\Delta t = 0.0008$ s, $N = 100$ cells) at location #8	74
Figure 6.5: Pressure profiles ($\Delta t = 0.0008$ s, $N = 100$ cells) at location #5	75

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

CFL	Courant-Friedrichs-Lewy
CPU	Central Processing Unit
DDR	Double Data Rate
ECC	Error-Correcting Code
ENO	Essentially Non-Oscillatory
GA	Genetic Algorithm
MUSCL	Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws
ODE	Ordinary Differential Equation
PE	Polyethylene
PC	Personal Computer
PDE	Partial Differential Equations
PPM	Piecewise Parabolic Method
PVC	Polyvinyl chloride
TVD	Total Variation Diminishing
WENO	Weighted Essentially Non-Oscillatory

CHAPITRE 1 INTRODUCTION

Le phénomène de coups de bélier fait partie de la famille des écoulements transitoires plus particulièrement de la sous-composante des ondes en mécanique des fluides. Il nous entoure et fait partie de notre quotidien. Plusieurs fois dans la journée, sans nous en rendre compte, nous créons des coups de bélier en fermant, par exemple trop rapidement, un robinet. Les conditions d'écoulement sont alors instantanément modifiées à travers les fluctuations de pression, provoquant une mise en décélération ou accélération très rapide du fluide. Une onde de choc se crée donc et met à l'épreuve l'élasticité de la canalisation en la faisant vibrer. La conduite qui est donc soumise à cette brusque variation des conditions d'écoulement réagit à la sollicitation jusqu'à l'absorption totale du choc ou jusqu'à la rupture. Dépendamment des caractéristiques dimensionnelles de la tuyauterie, le phénomène est plus ou moins éphémère et ne perdure pas trop longtemps avant que l'équilibre dynamique ne soit atteint à cause des pertes de charge dans la conduite; d'où son caractère transitoire. Si la tuyauterie est mal installée ou mal entretenue (verrous manquants ou inexistantes), aidé par le silence de la nuit, le bruit provoqué par la vibration est perceptible à l'oreille et même parfois gênant. Le même phénomène est constaté à l'ouverture brutale d'une vanne placée à l'extrémité amont d'un boyau d'arrosage. La vibration perdure dans la conduite, le temps que l'équilibre dynamique s'y installe.

Les surpressions et dépressions qui résultent du phénomène de coups de bélier peuvent atteindre plusieurs dizaines de bars; ce qui peut affecter la durée de vie des réseaux de conduites (Guinot 2012). À l'échelle industrielle, accélérée par la vétusté, un défaut d'entretien ou des anomalies structurelles, l'ondulation de la surpression créée par le coup de bélier peut-être à l'origine de **i)** la rupture des conduites forcées d'une centrale hydroélectrique à la suite d'un arrêt brutal de la turbine, **ii)** la rupture des conduites d'aqueduc à la suite d'une manœuvre rapide d'une vanne, **iii)** la rupture des canalisations et/ou des équipements fonctionnels des systèmes de pompage à la suite d'un démarrage trop rapide des pompes.

En phase d'avant-projet sommaire, les ingénieurs utilisent des équations simplifiées qui donnent des solutions analytiques : c'est l'approche analytique. Ces simplifications proviennent de l'application de l'hypothèse de la colonne rigide selon laquelle les propriétés du fluide restent constantes durant le coup de bélier et l'effet de la friction est négligé. Appliquées, par exemple, lors du pré-dimensionnement des moyens de mitigation contre la surpression, ces équations se

présentent sous une forme implicite et la résolution requiert une méthode itérative par approximations successives ou l'utilisation d'un programme informatique (Finnemore & Franzini 2002).

En phase d'avant-projet détaillé, les ingénieurs ont recours aux logiciels commerciaux tels que HYTRAN, HAMMER, etc. pour modéliser l'onde de choc à l'aide de la méthode des caractéristiques, en plus de ne pas considérer des phénomènes tels que par exemple la friction dynamique et la réponse viscoélastique des conduites en polymère. En effet, un réseau de canalisations présente généralement une configuration complexe d'axe non horizontal avec la présence de conduites de différents diamètres constitués de divers matériaux, la présence de singularités (coudes, divergents, convergents, vanne, clapets, ...) et d'équipements qui interagissent avec le fluide (pompes, turbines, ...); ce qui induit la présence de zones à fort gradient quand l'onde de choc traversera ces points critiques. D'où la nécessité d'utiliser un maillage non structuré; c'est-à-dire un maillage dont la discrétisation spatiale est non-uniforme. Le développement d'un schéma utilisant des variables conservées reste donc la solution pour faire face **i)** à cette discrétisation spatiale non uniforme induite par les zones à fort gradient, **ii)** aux conduites de forme quelconque, **iii)** aux variations de sections dans l'espace, et **iv)** aux axes non nécessairement horizontaux des conduites. De plus, en phase d'études détaillées des projets d'ingénierie, quoique dérivées des principes de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement, les équations du coup de bélier qui incorporent des phénomènes tels que la friction dynamique induite par la déformation du profil de vitesse, ou le comportement du matériau constituant la paroi de la conduite n'ont jamais été exprimées sous la forme conservative. Cela est dû au fait que la pression et le débit volumique utilisés comme variables ne sont aucunement des quantités conservatives.

Pour étayer cette problématique, trois hypothèses ont été identifiées :

- Hypothèse 1 :

L'élaboration d'abaques pourrait permettre aux ingénieurs d'explorer plusieurs options en peu de temps, sans perdre en précision, lors du pré-dimensionnement des cheminées d'équilibre en phase d'avant-projet.

- Hypothèse 2 :

La grande rigidité des conduites très peu déformables induit des variations temporelles de l'onde de choc qui ne pourraient être principalement attribuées qu'aux seules variations de la pression. La prise en compte de la déformation du profil de vitesse unidimensionnel, par rapport à sa forme d'état stationnaire supposée, participerait aussi à l'atténuation du coup de bélier en raison de grandes accélérations imposées aux particules de fluide à travers la section transversale.

- Hypothèse 3 :

La réponse des conduites viscoélastiques provoquerait un retard dans la propagation de l'onde de choc. La célérité de l'onde de surpression serait donc non constante car la dépendance entre la pression et la masse linéique du fluide dans la conduite serait non-linéaire.

L'objectif général de ces travaux de recherche est de proposer aux ingénieurs et praticiens une nouvelle approche fonctionnelle, décisionnelle et inclusive qui leur permettra, à chaque étape d'un projet, de mieux modéliser un coup de bélier en vue d'élaborer de meilleures solutions de mitigation.

Trois objectifs spécifiques découlent de l'objectif général :

- Objectif spécifique 1 :

Développer un nouveau modèle rapide et précis de pré-dimensionnement des moyens de mitigation des coups de bélier dans son approche analytique lors de l'avant-projet sommaire.

- Objectif spécifique 2 :

Développer un nouveau modèle du calcul des coups de bélier prenant en compte la friction dynamique pour les domaines de calcul non-uniformément discrétisés appliqués aux réseaux complexes.

- Objectif spécifique 3 :

Développer un nouveau modèle du calcul des coups de bélier prenant en compte la réponse du matériau des parois de la conduite via sa viscoélasticité pour les domaines de calcul non-uniformément discrétisés appliqués aux réseaux complexes.

L'objectif spécifique 1 vise directement la phase d'avant-projet sommaire. Les objectifs spécifiques 2 et 3 sont orientés vers la phase d'avant-projet détaillé et même le diagnostic technique des installations déjà existantes.

CHAPITRE 2 REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE

Ce chapitre présente une revue critique de la littérature de base. Notons que chaque article (chapitre 4, 5 et 6) comporte en son sein une revue critique plus exhaustive, en lien avec la contribution apportée.

La notion de coup de bélier a fait sa première apparition avec Menabrea (1858) qui a élaboré une courte note explicative. La théorie générale à travers la rigueur mathématique a été développée puis affinée au fil des ans grâce aux contributions de Michaud (1878) et (1903), Allievi (1903), (1913) et (1932), Schnyder (1932) et Jaeger (1933) qui en sont essentiellement les précurseurs. Depuis, on note une avancée dans ce domaine, grâce à des contributions originales.

2.1 Les cheminées (ou réservoirs) d'équilibre

Dans les grandes conduites comme par exemple dans un aménagement hydroélectrique, la cheminée d'équilibre est généralement installée sur la galerie d'amenée pour protéger les équipements mécaniques et la conduite forcée le cas échéant en absorbant une partie de l'onde de choc induite par le coup de bélier; cela engendre des oscillations de masse dans le réservoir.

Les travaux de Lescovich (1967), Roche (1975) et Chaudhry (1987), avec une bibliographie exhaustive sur ce sujet, où l'on trouve des théories significatives dans Jaeger (1958; 1960), ont étudié l'utilisation de réservoirs d'équilibre cylindriques dans les systèmes hydroélectriques et leurs problèmes de stabilité hydraulique. Outre les cheminées cylindriques, d'autres formes sont proposées par Streeter et Wylie (1993): cheminée conique, cheminée avec évacuateur de crue interne à cloche, cheminée d'appoint différentiel, etc.

Les recherches de Chaudhry et al. (1985), Finnemore et Franzini (2002) et Moghaddam (2004) ont abouti à des équations analytiques implicites pour l'analyse et le pré-dimensionnement d'une cheminée cylindrique. Cependant, l'utilisation de ces équations nécessitait de longs temps de calcul car elles doivent être résolues numériquement ou par essais et erreurs.

Chaudhry et Silvaaraya (1992) ont étudié la stabilité des oscillations de masse à l'intérieur d'une cheminée fermée pendant les conditions transitoires. Le résultat de cette étude a conduit les auteurs à proposer des diagrammes de stabilité qui ont permis d'indiquer la démarcation entre les régions stables et instables à l'intérieur du réservoir fermé.

L'impact de la présence d'un réservoir d'équilibre sur un réseau de canalisation a fait l'objet d'une contribution par Kim (2010) à travers l'application d'un Algorithme Génétique (AG) à la méthode de réponse impulsionnelle dérivée des fonctions d'impédance. Dans sa recherche, pour l'obtention d'un ensemble de paramètres globaux optimaux de la cheminée (tels que l'emplacement le long du réseau, la longueur et le diamètre du connecteur, et les dimensions de la cheminée), Kim (2010) a utilisé quatre fonctions objectifs différentes et 2500 itérations avec des paramètres d'entrée identiques. Cependant, pour résoudre un exemple d'application de cas simple, le modèle de Kim exige 1250 itérations avant d'obtenir les valeurs optimales globales des paramètres.

Ramadan et Mustafa (2013) ont étudié les effets de différents paramètres clés sur la conception des réservoirs d'équilibre, tels que le coefficient de frottement, la section transversale de la cheminée à surface libre, les oscillations de masse et le débit initial dans la conduite. Le modèle a été testé dans des conditions stables. Malheureusement, leur étude est considérée comme restrictive car leur modèle ne permet pas l'analyse ou la conception des réservoirs d'équilibre avec des données d'entrée initiales autres que celles fournies dans leur étude.

Bien que des contributions importantes remontant aux années 1960 aient aidé les concepteurs à mieux comprendre les comportements d'un réservoir d'équilibre, aucun diagramme n'a été développé pour aider à la conception rapide à l'étape d'avant-projet des cheminées d'équilibre cylindriques et coniques; ce qui aurait permis aux ingénieurs d'explorer plusieurs options en très peu de temps.

2.2 Les développements dans la modélisation du coup de bélier avec la prise en compte de la friction dynamique

Dans les modèles développés pour caractériser le phénomène du coup de bélier, on suppose, en général, que le coefficient de frottement est permanent ou quasi-permanent. Cependant, dans des écoulements transitoires, le profil de vitesse unidimensionnel est déformé de sa forme d'état stationnaire supposée en raison des grandes accélérations imposées sur les particules de fluide dans la section transversale de la conduite. Le frottement dynamique équivalent dépasse alors la valeur du régime quasi-permanent. Brunone et al. (1991) et par la suite Bergant et al. (2001) décomposent le frottement dynamique en la somme d'une composante quasi-permanente et d'une autre composante non-permanente. Quatre modèles de friction non-permanente ont été développés. Il

s'agit des modèles de Zielke (1968), Vardy et Brown (2003), Trikha (1975) et Brunone et al. (1991). Shamloo et al. (2015) procèdent à une étude comparative de ces quatre modèles de friction. Selon leurs conclusions, le modèle de Vardy et Brown (2003) est limité aux conduites lisses tandis que le modèle de Zielke (1968) n'est efficace que pour les écoulements laminaires transitoires. Le modèle de Trikha (1975) est une simplification du modèle de Zielke (1968). Le modèle de Brunone et al. (1991) semble être le seul qui convienne à tous les types d'écoulements transitoires pour toutes les valeurs de rugosité.

Malgré ces développements, la prise en compte de la composante non-permanente de la friction dynamique n'arrive pas à prédire adéquatement l'ampleur de l'onde de choc induite par le coup de bélier; l'onde étant toujours surestimée. Bergant et al. (2008a) et (2008b) entament alors une investigation expérimentale sur un autre paramètre clé qui pourraient affecter la forme de l'onde de surpression : le comportement viscoélastique des parois de la conduite

2.3 Les développements dans la modélisation du coup de bélier avec la prise en compte de la viscoélasticité des parois de la conduite

Lors de l'apparition d'événements transitoires dans les tuyaux viscoélastiques, tels que le polychlorure de vinyle (PVC) et le polyéthylène (PE), l'amortissement mécanique de la surpression dû à la réponse des parois de la conduite est beaucoup plus significatif que l'atténuation due au frottement visqueux du fluide (Bergant et al. 2008a, 2008b; Covas et al. 2004, 2005; Suo et Wylie 1990; Franke 1983; Güney 1983; Rieutord 1982; Rieutord et Blanchard 1979; Gally et al. 1979). En plus, la célérité de l'onde de choc est retardée dans une conduite viscoélastique; cela est dû à la déformation des parois de la conduite.

Suo et Wylie (1990) modélisent alors la vitesse de propagation de l'onde en la décomposant en partie réelle et partie imaginaire pour tenir compte de la dualité entre l'élasticité et la viscosité. Ce qui induit un module d'élasticité complexe du matériau des parois de la conduite. Bien malheureusement, le modèle d'onde complexe développé par Suo et Wylie (1990) n'arrive pas à prédire avec efficacité la valeur réelle de l'onde. En effet, les valeurs modélisées trouvées par leur modèle demeurent inférieures de 30 à 40% à celles observées expérimentalement.

Pour modéliser la réponse viscoélastique de la conduite, Güney (1983), Covas et al. (2005) et par la suite Weinerowska-Bords (2006) utilisent le modèle de Kelvin-Voigt. Ce modèle mécanique

présente à la fois les propriétés élastiques et visqueuses d'un matériau viscoélastique à travers l'assemblage en parallèle d'un amortisseur purement visqueux et un ressort Hookéen (la variation de longueur est proportionnelle à la force de traction/compression, pour de petites déformations). Cependant, les modèles développés par Güney (1983), Covas et al. (2005) et Weinerowska-Bords (2006) sont limités à l'utilisation des domaines de calcul uniformément discrétisés et ne présentant pas de zones à fort gradient; les variables y sont non-conservatives.

Quoique dérivés des principes de conservation de masse et de la quantité de mouvement, aucune contribution sur les coups de bélier n'a intégré ni le frottement dynamique, ni le comportement viscoélastique des parois de la conduite, dans des équations de coup de bélier sous une forme conservative.

2.4 Les développements dans la modélisation et l'implémentation du coup de bélier avec des variables conservatives

Guinot (2003) apporte sa contribution en transcrivant les équations classiques de coup de bélier avec des variables conservatives dans une conduite faiblement élastique. La principale motivation de Guinot était de montrer que le phénomène de coup de bélier pouvait aussi être décrit à travers un système de lois de conservation sous la forme conservative pour des conduites de forme quelconque, de section variable dans l'espace et d'axe non nécessairement horizontal. Mais, dans sa formulation, il ne tient compte ni de la viscoélasticité des parois de la conduite, ni de la composante non-permanente de la friction. À l'aide de ses hypothèses, le terme source de ses équations conservatives est non-hyperbolique (induit par la seule composante permanente de la friction) et la célérité de l'onde est constante (induite par la dépendance linéaire entre la pression et la masse linéique). Ses hypothèses rendent donc ses équations « simples ». Il procède à la résolution de son système hyperbolique des lois de conservation en utilisant le schéma volume fini de Godunov (1959). L'ampleur de l'onde de choc n'arrive cependant pas à être prédite ni dans une conduite rigide, ni dans une conduite viscoélastique.

CHAPITRE 3 DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL DE RECHERCHE ET ORGANISATION GÉNÉRALE DU DOCUMENT INDIQUANT LA COHÉRENCE DES ARTICLES PAR RAPPORT AUX OBJECTIFS DE LA RECHERCHE

3.1 Méthodologie

Deux étapes majeures existent dans le volet technique d'un projet d'ingénierie en hydraulique. L'étude technique commence d'abord par l'analyse (pré-dimensionnement) de plusieurs choix structuraux face à une problématique donnée. Il s'agit notamment de déterminer des valeurs globales des paramètres de dimensions de chaque solution de façon à analyser les avantages et les inconvénients de chaque variante, afin de permettre une estimation budgétaire du coût et des différents impacts : c'est la phase d'avant-projet sommaire. À cette phase, les plans et devis n'ayant pas encore été amorcés, les ingénieurs ne disposent pas de paramètres détaillés pouvant pousser l'analyse technique plus loin. Des calculs analytiques effectués grossièrement sur la base de quelques simplifications induites par des cas les plus défavorables sont généralement explorées. Forts des recommandations des ingénieurs, les décideurs portent leur choix sur une solution qui sera investiguée dans ses détails : c'est la phase d'avant-projet détaillé. L'élaboration des plans et devis de la solution retenue, et les calculs numériques plus poussés des ingénieurs avancent conjointement.

Au niveau de son aspect méthodologie, cette thèse par articles s'est d'abord concentrée sur l'approche analytique des écoulements transitoires à la suite d'un coup de béliet dans une conduite devant être équipée d'une cheminée d'équilibre à section transversale irrégulière. L'aire non constante de la section transversale de la cheminée conduit à une équation différentielle non homogène de premier ordre à coefficients variables. Les équations développées seront ensuite dérivées et les solutions présentées sous forme d'abaques utiles lors de la conception rapide (objectif spécifique 1) des cheminées d'équilibre cylindriques et coniques. Une étude comparative entre la méthode classique d'approximation successive et la résolution par les diagrammes est menée. La motivation était de mettre à la disposition des ingénieurs et concepteurs un outil simple et rapide pour le pré-dimensionnement des réservoirs d'équilibre face aux coups de béliet, leur donnant la possibilité d'étudier plusieurs variantes dans un très court délai.

Ensuite, des équations aux dérivées partielles de coup de bélier, à travers une approche numérique, incorporant la friction dynamique ont été développées avec des variables conservatives (objectif spécifique 2). Le modèle de Brunone et al. (1991) a été utilisé pour modéliser la distorsion du profil de vitesse unidimensionnel engendrée par les grandes accélérations imposées sur les particules de fluide. L'approche volume fini de Godunov (1959) aux systèmes hyperboliques unidimensionnels des lois de conservation a été utilisée pour la résolution numérique des équations. Un algorithme complet de résolution est fourni pour décrire chaque étape de résolution. Deux études de cas ont fait l'objet d'une investigation ayant conduit à la comparaison entre d'une part les solutions analytique, numérique à friction quasi-permanente, numérique avec frottement dynamique, et d'autre part les résultats expérimentaux.

Enfin, des équations aux dérivées partielles de coup de bélier incorporant la viscoélasticité des parois de la conduite ont été développées avec des variables conservatives (objectif spécifique 3). Le modèle viscoélastique généralisé de Kelvin-Voigt (Aklonis et al. 1972) a été utilisé pour caractériser la réponse du matériau des parois de la conduite face à la sollicitation. Afin d'améliorer la rapidité de la résolution numérique, la friction, quant à elle, a été modélisée à l'aide du schéma numérique robuste et précis de Clamond (2009) qui est lié à la fonction Oméga de Lambert. L'approche volume fini de Godunov (1959) aux systèmes hyperboliques unidimensionnels des lois de conservation a été utilisée pour la résolution numérique des équations. Un algorithme complet de résolution numérique est fourni pour décrire chaque étape de résolution. Une étude de cas a fait l'objet d'une investigation en comparant d'une part les solutions analytique, numérique à friction quasi-permanente et numérique incorporant le comportement viscoélastique de la paroi et d'autre part les résultats expérimentaux.

3.2 Organisation

Cette thèse a été structurée de telle sorte que chaque objectif spécifique fasse l'objet d'une contribution scientifique sous la forme d'un article. Mise à part la cohérence des trois articles par rapports aux objectifs spécifiques de la recherche, les contributions ont un lien sans équivoque. En effet, elles fournissent aux ingénieurs des outils pour la modélisation des phénomènes de coups de bélier dans tout le processus d'un projet allant de l'avant-projet (article 1) jusqu'aux études détaillées (articles 2 et 3) et même à la modélisation des conduites d'un réseau existant (articles 2 et 3). Chaque article comporte en son sein une revue critique plus exhaustive de la littérature, en

lien avec la contribution apportée, le détail des équations développées, et le mode de résolution desdites équations.

Précédemment,

- Le chapitre 1 a **i)** présenté la problématique présentée sous différents aspects, **ii)** émis des hypothèses visant à fournir une explication vraisemblable devant être chacune vérifiée dans ses conséquences, **iii)** établi l'objectif général à l'atteinte duquel cette présente thèse est sensée contribuer, et **iv)** fixé les objectifs spécifiques décrivant chacun la performance visée;
- Le chapitre 2 a présenté une revue critique de la littérature de base qui a permis de localiser, regrouper et résumer les études existantes en lien avec les objectifs spécifiques;
- Le présent chapitre 3 présente la démarche de l'ensemble du travail de recherche et l'organisation générale du document indiquant la cohérence des articles par rapport aux objectifs de la recherche;

La suite de la présente thèse est organisée comme suit :

- Le chapitre 4 présente l'article 1 qui répond pleinement à l'objectif spécifique 1 qui analyse l'approche analytique des coups de bélier et propose des abaques pour évaluer les valeurs de surpression et permettre la conception d'une cheminée d'équilibre dans une conduite en phase d'avant-projet. Cet article a été publié en octobre 2015 dans le *Journal of Water Resource and Protection* du groupe éditorial *Scientific Research* et porte la référence suivante:

Seck, A. and Fuamba, M. (2015) *Contribution to the Analytical Equation Resolution Using Charts for Analysis and Design of Cylindrical and Conical Open Surge Tanks*. *Journal of Water Resource and Protection*, 7, 1242-1256. doi:10.4236/jwarp.2015.715101.
- Le chapitre 5 présente l'article 2 qui développe la dérivation des équations du coup de bélier avec des variables conservatives incorporant le frottement dynamique et fournit un algorithme de résolution numérique de ces équations afin d'aider les ingénieurs en phase de conception détaillée à modéliser en toute sécurité la véritable ampleur du coup de bélier dans une conduite rigide. Cette contribution répond à l'objectif spécifique 2 de la présente thèse. Actuellement en processus de publication, cet article a été accepté en février 2017 au

Journal of Hydraulic Engineering du groupe éditorial ASCE (*American Society of Civil Engineers*) et porte la référence suivante:

Seck, A.; Fuamba, M. and Kahawita, R. (2017) *Finite Volume Solutions to the Water-hammer Equations in Conservation Form incorporating Dynamic Friction using the Godunov Scheme*. *Journal of Hydraulic Engineering*, doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001333.

- Le chapitre 6 traite spécifiquement le cas des conduites constituées de polymère qui sont aussi présentes dans les réseaux d'aqueduc et des systèmes de pompage. L'article 3 y est consigné afin de fournir aux ingénieurs la dérivation des équations du coup de bélier avec des variables conservatives prenant en compte le comportement viscoélastique des parois de la conduite et propose un algorithme de résolution numérique de ces équations. Cette contribution répond à l'objectif spécifique 3 de la présente thèse. Cet article qui s'intitule « *Finite Volume Solutions to the Water-hammer Equations in Conservation Form incorporating Viscoelastic behaviour of the pipe-wall using the Godunov Scheme* » a été soumis à la mi-janvier 2017 au journal spécialisé *Journal of Fluids and Structures* du groupe éditorial ELSEVIER. Ce journal traite spécifiquement des contributions originales sur les interactions fluide-structure dans les systèmes dynamiques. L'article y est présentement en révision par les pairs.
- Le chapitre 7 présente une discussion générale de l'ensemble de la thèse en regard des aspects méthodologiques et des résultats en lien avec la critique de la littérature.
- Le chapitre 8 met l'accent sur les contributions de la thèse à l'avancement des connaissances et au développement des technologies, tout en identifiant ses limites et ses contraintes. Il identifie aussi de nouvelles voies de recherche. Des recommandations y sont également formulées.

CHAPITRE 4 ARTICLE 1 : CONTRIBUTION TO THE ANALYTICAL EQUATION RESOLUTION USING CHARTS FOR ANALYSIS AND DESIGN OF CYLINDRICAL AND CONICAL OPEN SURGE TANKS

(Manuscript published in the Journal of Water Resource and Protection)

Aboudou Seck¹ Ph.D.c.; Musandji Fuamba² Ph.D.

4.1 Abstract

In the event of an instantaneous valve closure, the pressure transmitted to a surge tank induces the mass fluctuations that can cause high amplitude of water-level fluctuation in the surge tank for a reasonable cross-sectional area. The height of the surge tank is then designed using this high water level mark generated by the completely closed penstock valve. Using a conical surge tank with a non-constant cross-sectional area can resolve the problems of space and height.

When addressing issues in designing open surge tanks, key parameters are usually calculated by using complex equations, which may become cumbersome when multiple iterations are required. A more effective alternative in obtaining these values is the use of simple charts.

Firstly, this paper presents and describes the equations used to design open conical surge tanks. Secondly, it introduces user friendly charts that can be used in the design of cylindrical and conical open surge tanks. The contribution can be a benefit for practicing engineers in this field. A case study is also presented to illustrate the use of these design charts.

The case study's results show that key parameters obtained via successive approximation method required 26 iterations or complex calculations, whereas these values can be obtained by simple reading of the proposed chart. The use of charts to help surge tanks designing, in the case of

¹ Ph.D. Student, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7 (corresponding author). E-mail: aboudou.seck@polymtl.ca

² Professor, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7.

preliminary designs, can save time and increase design efficiency, while reducing calculation errors.

Keywords: Hydraulic transients; Surge tank; Water-hammer; First-order non-homogeneous differential equation with variables coefficients; Friendly charts.

4.2 Introduction

A water hammer is defined as a pressure surge or wave caused when a fluid in motion is suddenly forced to stop or change directions. Water hammers usually occur when the flow of water into a turbine or pump decreases rapidly due to a sudden drop in the pressure head, or when a valve is suddenly closed at an end of a pipeline system. This creates a pressure wave that propagates through the pipe: this phenomenon in the pipe is called a water-hammer. In order to remedy such a situation, a surge tank can be connected to the piping system which (depending on the number of tanks, arrangement, and the nature of the restriction between the surge tank and the piping system) can take several forms and configurations. Besides the simple cylindrical surge tank, other types are adopted: conical surge tank, surge tank with internal bell-mouthed spillway, differential surge tank, etc. (Streeter and Wylie 1993). The design of open surge tank requires the solving of first order, non-homogeneous, linear differential equations. This process will lead to an implicit equation for the determination of key parameters of a surge tank and the penstock. The solution will be found either by using an equation solver or by trial and error.

For preliminary designs, practicing engineers are usually overwhelmed with all the details of pipeline or canal systems. They need the general framework to build the surge tank in hydroelectric power plants projects. Simplified charts may help to facilitate identification of key parameters and variations.

Basically, the origin of the theory of water hammer goes back to the contributions of Menabrea (1858), who published a short note on the calculation of water pressures (Anderson 1976). However, by its mathematical rigor and significant theories, the papers of Michaud (1878) and (1903), Allievi (1903), (1913) and (1932), Schnyder (1932) and Jaeger (1933) are the source of inspiration for all studies on water hammer. The use of surge tanks in hydropower systems and their problems with stability were reviewed by Lescovich (1967), Roche (1975) and Chaudhry

(1987) (with extensive bibliography on this subject, where significant theories are found in Jaeger (1958; 1960)).

Guinot (2003) focuses on theoretical and practical implementation of Godunov approach to simulate the water hammer with steady friction; that induces a non-hyperbolic source term. But for transient flow in a constant diameter pipe, the friction factor which is the sum of the quasi-steady part and unsteady part, is developed in the model by Brunone et al. (1991), and modified by Bergant et al. (2001).

Research by Chaudhry et al. (1985), Finnemore et al. (2002) and Moghaddam (2004) provided analytical implicit equations for analysing and designing a simple surge tank. These equations yielded cylindrical surge tank dimensions that were solved either numerically or by trial and error. However, using these equations required long computational times.

Chaudhry et al. (1992) investigated the stability of water level oscillations inside a closed surge tank during transient conditions. The result of this investigation led them to obtain stability diagrams which helped indicate the demarcation of stable, unstable and incompatible regions within a closed surge tank. Though significant contributions dating back to the 1950's helped designers to better understand the behaviours of a surge tank, no diagrams were ever developed for reference purposes in the designing of cylindrical and conical surge tanks.

The impact of the presence of a surge tank on a pipeline system was added to the research by Kim (2010) through the application of a Genetic Algorithm (GA) into the Impulse Response method platform, which derived the impedance functions for pipeline systems equipped with a surge tank. In his quest to secure a set of global optimum parameter values for a surge tank (such as location along the pipeline, the length of the connector, and the diameters required for the connector and the surge tank), Kim utilized four different objective functions and 2,500 iterations with identical GA input parameters. However, to solve an example of a simple case application, Kim required 1,250 iterations before obtaining the global optimum parameter values.

Ramadan et al. (2013) investigated the effects of different key parameters on surge tank designs, such as the friction losses coefficient, surge tank cross-sectional area on the water surface, oscillations tank, and total discharge. The design analysis was tested under steady conditions. Unfortunately, their study is considered restrictive as their model does not allow for surge tank

analysis or design in steady hydraulic system conditions, with initial input data other than those provided in their study.

All of these contributions require sophisticated resolution models and a long processing time. This paper bridges the gap between the design concept and the detailed design phase on surge tanks by providing user friendly diagrams for the design of cylindrical and conical open surge tanks.

4.3 Methodology

This paper focuses on analytical approach to the unsteady flow of incompressible fluid in pipes. The non-constant cross-sectional area of surge tanks induces the first-order non-homogeneous differential equation with variable coefficients of water hammer. Firstly, the governing equations are derived; secondly charts for analysis and design of cylindrical and conical open surge tanks are given; and finally, one case study is presented and a comparative study between the successive approximation method and the resolution by the charts is done.

4.4 Governing Equations

Figure (4.1) presents sketches that define a surge tank analysis in three different flow scenarios: steady flow conditions, transient flow conditions, and conditions at the end of a time interval (after the closing of the valve).

4.4.1 First-order non-homogeneous differential equation ODE with variable coefficients

In steady flow conditions, the difference Z_0 in water level between the static level of the reservoir and the surge tank (measured negatively downward from the static water level) is equal to the sum of the head loss due to velocity head, friction, and any minor losses in the pipe as represented by Equation (4-1).

$$-Z_0 = K \frac{V_0^2}{2g} \quad (4-1)$$

Where

$$K = \frac{fL}{D} + \sum k + 1 \quad (4-2)$$

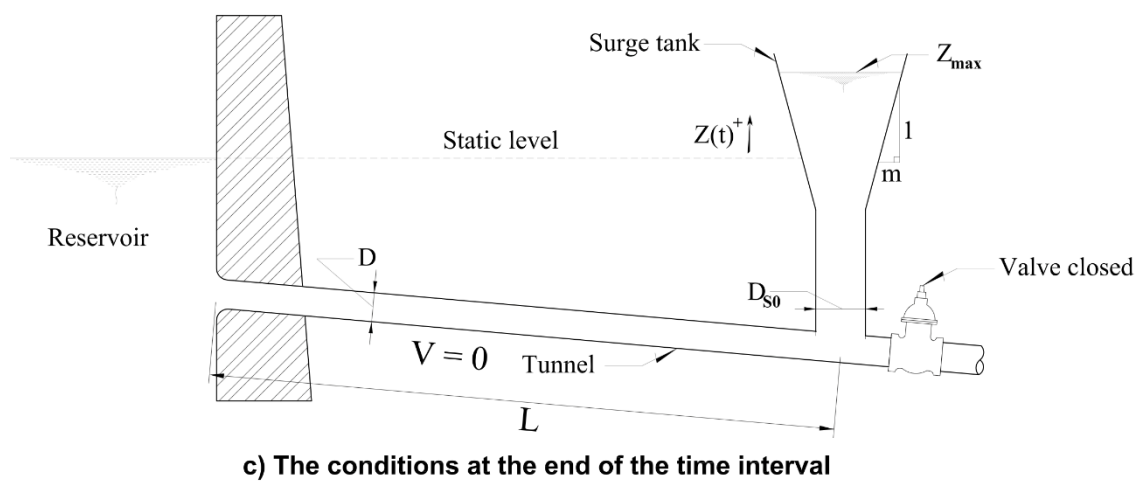
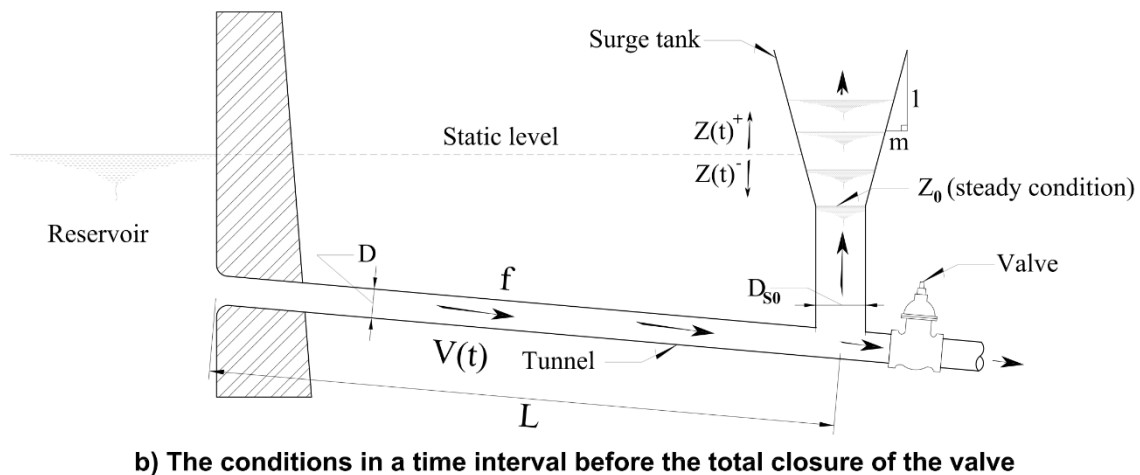
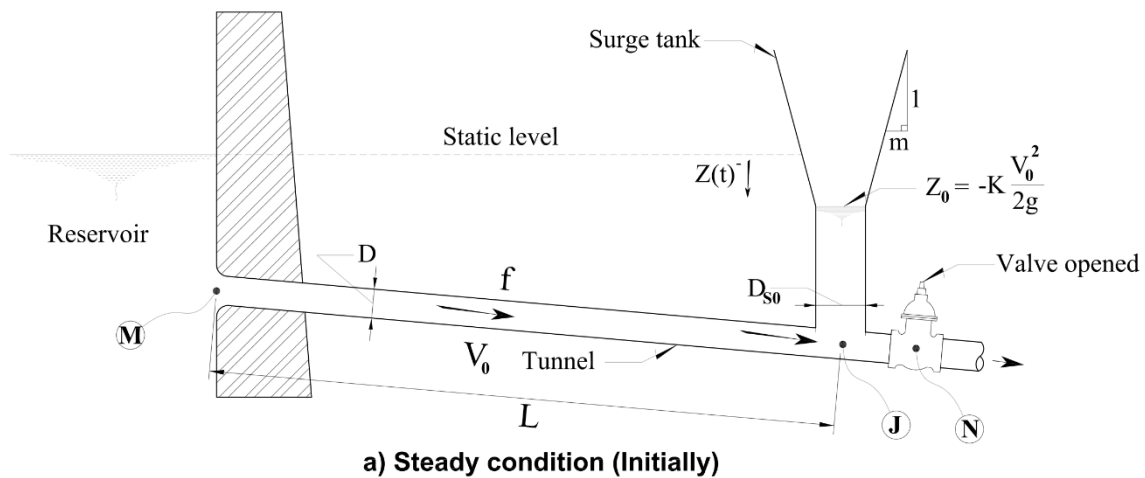


Figure 4.1: Definition sketch for surge tank analysis

Transient flow conditions occur at a time interval prior to total valve closure and are characterized by Equation (4-3), where dZ/dt represents the flow velocity through the surge tank when the valve is completely closed.

$$-Z = K \frac{V^2}{2g} + \frac{L}{g} \frac{dV}{dZ} \frac{dZ}{dt} \quad (4-3)$$

The conditions at the end of time interval are characterized by the continuity as in Equation (4-4).

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{AV}{A_S} \quad (4-4)$$

Where,

$$A_S = \frac{\pi}{12} (D_S^2 + D_{S0}^2 + D_S D_{S0}) \quad (4-5)$$

And

$$D_S = D_{S0} + 2mZ \quad (4-6)$$

As a result, Equation (4-5) becomes

$$A_S = \frac{\pi}{12} (4m^2 Z^2 + 6m D_{S0} Z + 3D_{S0}^2) \quad (4-7)$$

Substituting Equation (4-7) into Equation (4-4), and rearranging Equation (4-3) gives the first-order non-homogeneous differential equation with variable coefficients, where the non-constants coefficients b and c are continuous functions of Z .

$$X' + bX = cZ \quad (4-8)$$

Where,

$$X = V^2, \quad b = 2KC \quad \text{and} \quad c = -4gC \quad (4-9)$$

With

$$C = \frac{D_{S0}^2}{2LD^2} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{D_{S0}} Z + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \quad (4-10)$$

4.4.2 Solution of ODE

The solution of Equation (4-8) is the sum of a particular solution and the general solution of the associated homogeneous equation $X' + bX = 0$.

Solving by integration and isolating X leads to a family of solutions associated to the homogeneous equation:

$$X = \lambda \exp \left\{ -\frac{KD_{S0}^2}{LD^2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 Z^3 + \frac{m}{D_{S0}} Z^2 + Z \right] \right\} \quad (4-11)$$

This general solution (Equation (4-11)) contains a constant of integration λ , which denotes any real number. One particularity of homogeneous linear differential equations is that $X = 0$ represent a solution called the trivial solution. However, solutions of interest for this paper fall under the category of non-trivial solutions. Particular solution by variation of parameters is used (Hildebrand 1962). This particular solution is expressed in the following terms:

$$X = \alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta \quad (4-12)$$

Where,

$$\alpha = -\frac{8g}{3} \left(\frac{D_{S0}^2}{LD^2} \right) \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 \frac{1}{b} \quad (4-13)$$

$$\beta = -4g \left(\frac{D_{S0}^2}{LD^2} \right) \left(\frac{m}{D_{S0}} \right) - 3\alpha \frac{1}{b} \quad (4-14)$$

$$\gamma = -2g \left(\frac{D_{S0}^2}{LD^2} \right) \frac{1}{b} - 2\beta \quad (4-15)$$

$$\delta = -\gamma \frac{1}{b} \quad (4-16)$$

Finally, the general solution of the non-homogeneous equation is obtained:

$$X = \alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta + \lambda \exp \left\{ -\frac{KD_{S0}^2}{LD^2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 Z^3 + \frac{m}{D_{S0}} Z^2 + Z \right] \right\} \quad (4-17)$$

Or, since $X = V^2$, the general equation relating the velocity V in the pipe to the water surface level Z in the conical surge tank is:

$$V^2 = \alpha Z^3 + \beta Z^2 + \gamma Z + \delta + \lambda \exp \left\{ -\frac{KD_{S0}^2}{LD^2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 Z^3 + \frac{m}{D_{S0}} Z^2 + Z \right] \right\} \quad (4-18)$$

The unknown constant of integration λ is eliminated with the initial conditions (Equation (4-1): when $V = V_0$ then $Z = Z_0$) and the final conditions (when $V = 0$ then $Z = Z_{\max}$).

4.4.3 Solving ODE with initial-value and final-value constraints

For initial conditions, substituting these into Equation (4-18) and rearranging gives:

$$V_0^2 - \alpha_0 Z_0^3 - \beta_0 Z_0^2 - \gamma_0 Z_0 - \delta_0 = \lambda \exp \left\{ -\frac{KD_{S0}^2}{LD^2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 Z_0^3 + \frac{m}{D_{S0}} Z_0^2 + Z_0 \right] \right\} \quad (4-19)$$

Where

$$\alpha_0 = -\frac{8g}{3} \left(\frac{D_{S0}^2}{LD^2} \right) \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 \frac{1}{b_0} \quad (4-20)$$

$$\beta_0 = -4g \left(\frac{D_{S0}^2}{LD^2} \right) \left(\frac{m}{D_{S0}} \right) - 3\alpha_0 \frac{1}{b_0} \quad (4-21)$$

$$\gamma_0 = -2g \left(\frac{D_{S0}^2}{LD^2} \right) \frac{1}{b_0} - 2\beta_0 \quad (4-22)$$

$$\delta_0 = -\gamma_0 \frac{1}{b_0} \quad (4-23)$$

$$b_0 = \frac{KD_{S0}^2}{LD^2} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{D_{S0}} Z_0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \quad (4-24)$$

For final conditions, substituting these into Equation (4-18) and rearranging gives:

$$\begin{aligned}
 & -\alpha_m Z_{max}^3 - \beta_m Z_{max}^2 - \gamma_m Z_{max} - \delta_m \\
 & = \lambda \exp \left\{ -\frac{K D_{S0}^2}{L D^2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 Z_{max}^3 + \frac{m}{D_{S0}} Z_{max}^2 + Z_{max} \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4-25}$$

Where

$$\alpha_m = -\frac{8g}{3} \left(\frac{D_{S0}^2}{L D^2} \right) \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 \frac{1}{b_m} \tag{4-26}$$

$$\beta_m = -4g \left(\frac{D_{S0}^2}{L D^2} \right) \left(\frac{m}{D_{S0}} \right) - 3\alpha_m \frac{1}{b_m} \tag{4-27}$$

$$\gamma_m = -2g \left(\frac{D_{S0}^2}{L D^2} \right) \frac{1}{b_m} - 2\beta_m \tag{4-28}$$

$$\delta_m = -\gamma_m \frac{1}{b_m} \tag{4-29}$$

$$b_m = \frac{K D_{S0}^2}{L D^2} \left[\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{m}{D_{S0}} Z_{max} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \right] \tag{4-30}$$

Finally, dividing Equation (4-25) by Equation (4-19) gives:

$$\begin{aligned}
 & \frac{-\alpha_m Z_{max}^3 - \beta_m Z_{max}^2 - \gamma_m Z_{max} - \delta_m}{V_0^2 - \alpha_0 Z_0^3 - \beta_0 Z_0^2 - \gamma_0 Z_0 - \delta_0} \\
 & = \exp \left\{ -\frac{K D_{S0}^2}{L D^2} \left[\frac{4}{9} \left(\frac{m}{D_{S0}} \right)^2 (Z_{max}^3 - Z_0^3) + \frac{m}{D_{S0}} (Z_{max}^2 - Z_0^2) \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + (Z_{max} - Z_0) \right] \right\}
 \end{aligned} \tag{4-31}$$

Multiplying the numerator and denominator of the left-hand side of Equation (4-31) by K produces a result that leads to an implicit equation for all parameters Z_0 , V_0 , Z_{max} , K , L , D_{S0} , m and D_S :

$$\frac{-\alpha'_m Z_{max}^3 - \beta'_m Z_{max}^2 - \gamma'_m Z_{max} - \delta'_m}{W - \alpha'_0 Z_0^3 - \beta'_0 Z_0^2 - \gamma'_0 Z_0 - \delta'_0} = \exp \left\{ -\frac{1}{Y} \left[\frac{4}{9} M^2 (Z_{max}^3 - Z_0^3) + M (Z_{max}^2 - Z_0^2) + (Z_{max} - Z_0) \right] \right\} \quad (4-32)$$

Where

$$\alpha'_m = K \alpha_m = -\frac{8g}{3Y} M^2 \frac{1}{b_m} \quad (4-33)$$

$$\beta'_m = K \beta_m = -\frac{4g}{Y} M - 3\alpha'_m \frac{1}{b_m} \quad (4-34)$$

$$\gamma'_m = \gamma_m = -\frac{2g}{Y} \frac{1}{b_m} - 2\beta'_m \quad (4-35)$$

$$\delta'_m = K \delta_m = -\gamma'_m \frac{1}{b_m} \quad (4-36)$$

$$\alpha'_0 = K \alpha_0 = -\frac{8g}{3Y} M^2 \frac{1}{b_0} \quad (4-37)$$

$$\beta'_0 = K \beta_0 = -\frac{4g}{Y} M - 3\alpha'_m \frac{1}{b_0} \quad (4-38)$$

$$\gamma'_0 = \gamma_0 = -\frac{2g}{Y} \frac{1}{b_0} - 2\beta'_0 \quad (4-39)$$

$$\delta'_0 = K \delta_0 = -\gamma'_0 \frac{1}{b_0} \quad (4-40)$$

$$W = K V_0^2 \quad (4-41)$$

$$Y = \frac{L D^2}{K D_{S0}^2} \quad (4-42)$$

$$M = \frac{m}{D_{S0}} \quad (4-43)$$

However, solving Equation (4-32) for Z_0 , V_0 , Z_{\max} , K , L , D_{S0} , m or D_S requires an equation solver or manual trial and error.

Another method is to first find $Z_{\max} = Z_m$ for $M = 0$ (corresponding to a cylindrical or simple surge tank) using Equation (4-44) and then find Z'_m with $M \neq 0$ (corresponding to the conical surge tank) using Equation (4-45).

$$Z_m = Y \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{1}{Y} \left(Z_m + \frac{W}{2g} \right) \right] \right\} \quad (4-44)$$

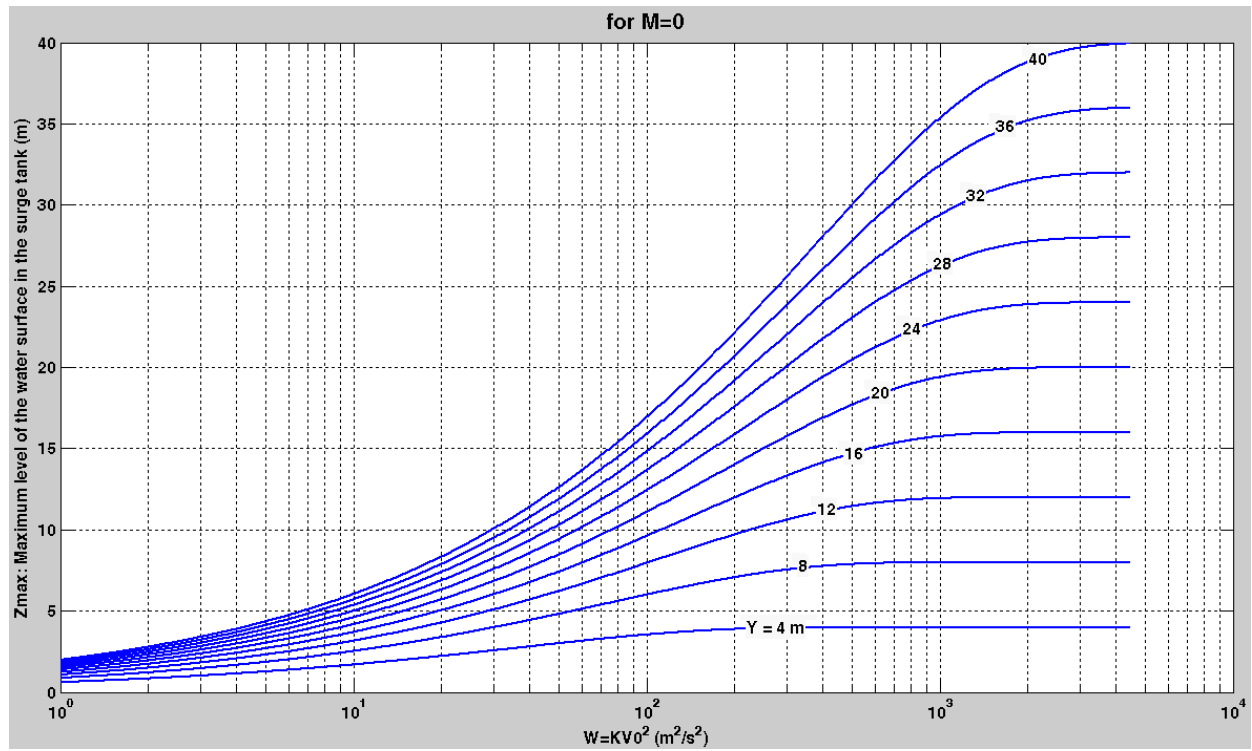
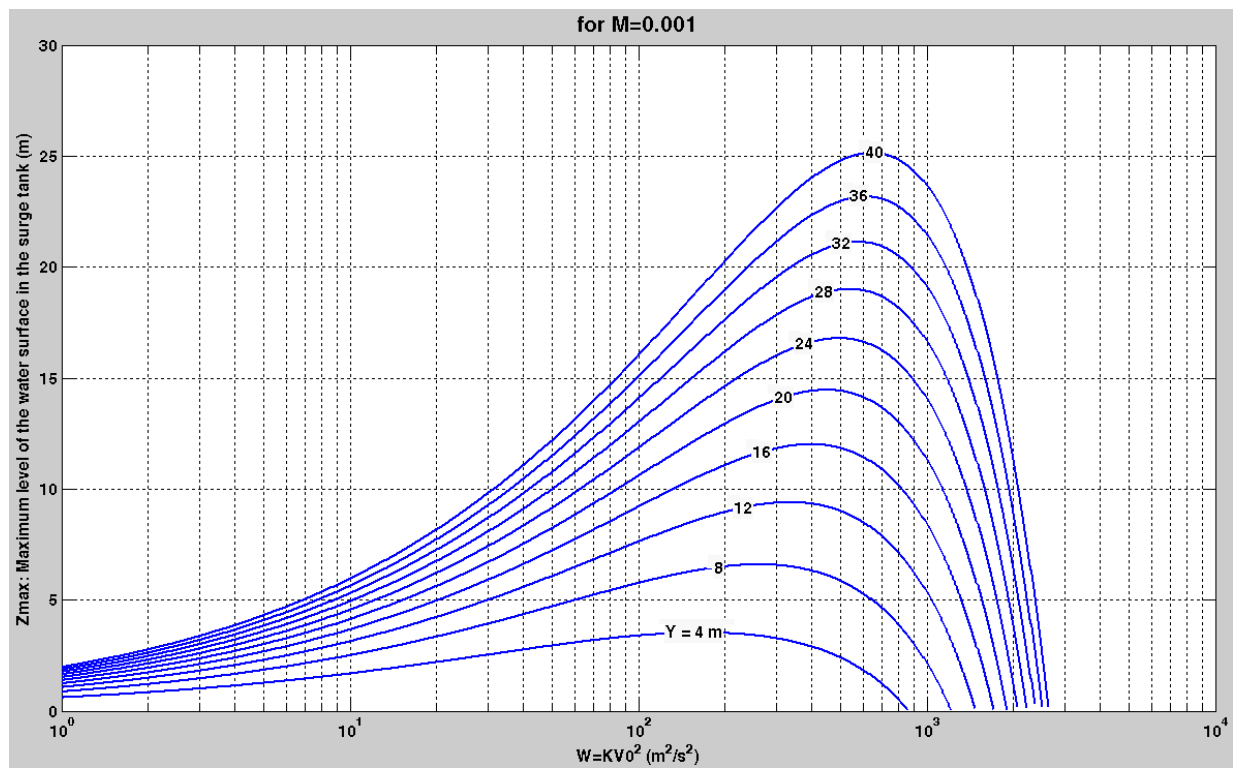
$$Z'_m = \frac{3(Z_m - Z_0)}{[2M(Z'_m - Z_0) + 1]^2 + 2M(Z'_m - Z_0) + 2} + Z_0 \quad (4-45)$$

Equations (4-32), (4-44) and (4-45) are based on four parameters Y , W , M and Z_{\max} . From Equations (4-44) one can show that:

$$Z_m < Y \quad (4-46)$$

4.5 Charts

The charts, which are presented in Figures 4.2 to 4.11, relate maximum level of the water surface in the surge tank and parameters Y and W for fully developed flow. These charts represent the solutions of the Equations (4.32), (4.44) and (4.45) for values of M ranging from 0 to 0.3 and for values of Y lower than 40 meters.

Figure 4.2: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0$ Figure 4.3: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.001$

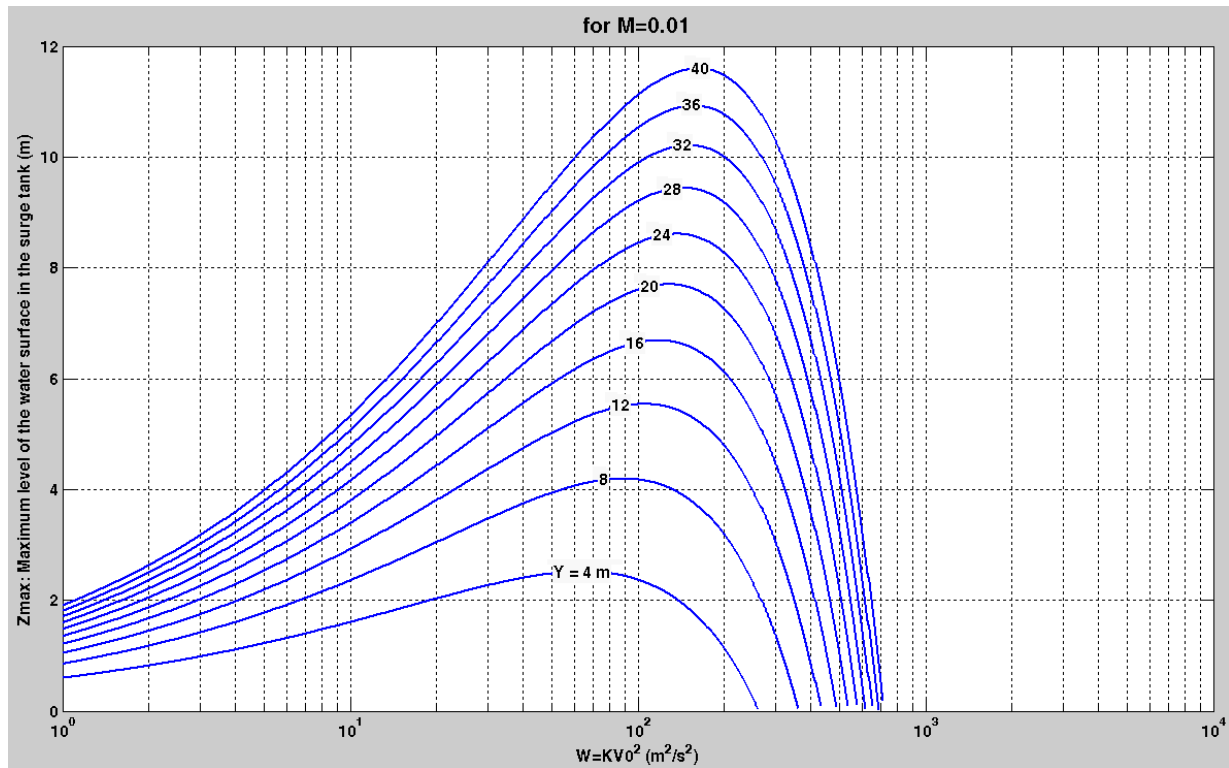


Figure 4.4: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.01$

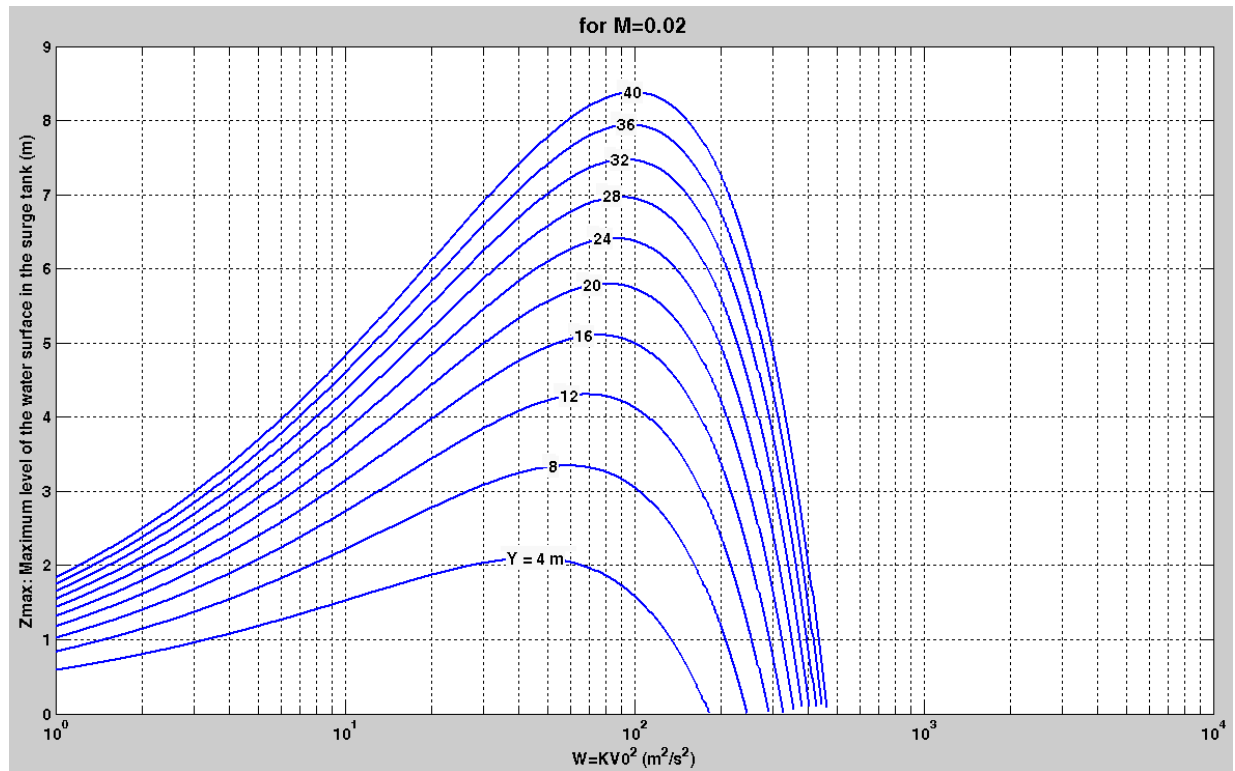
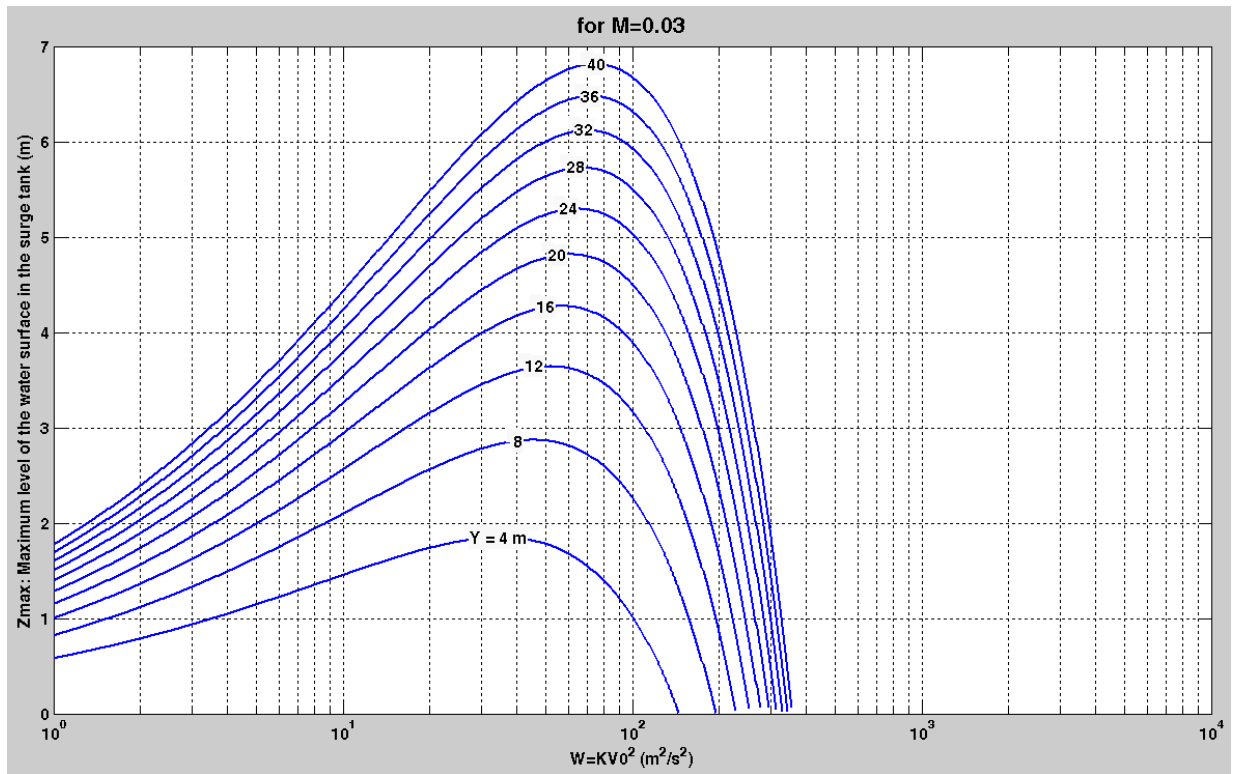
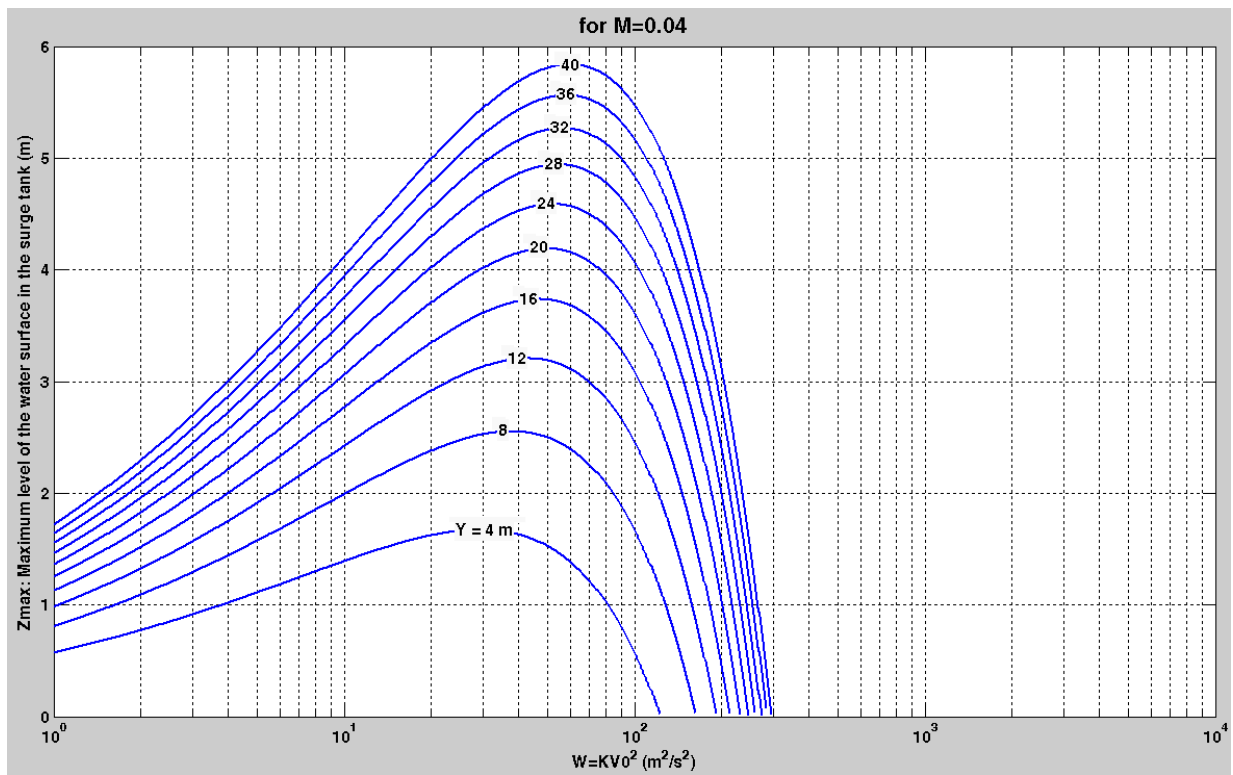
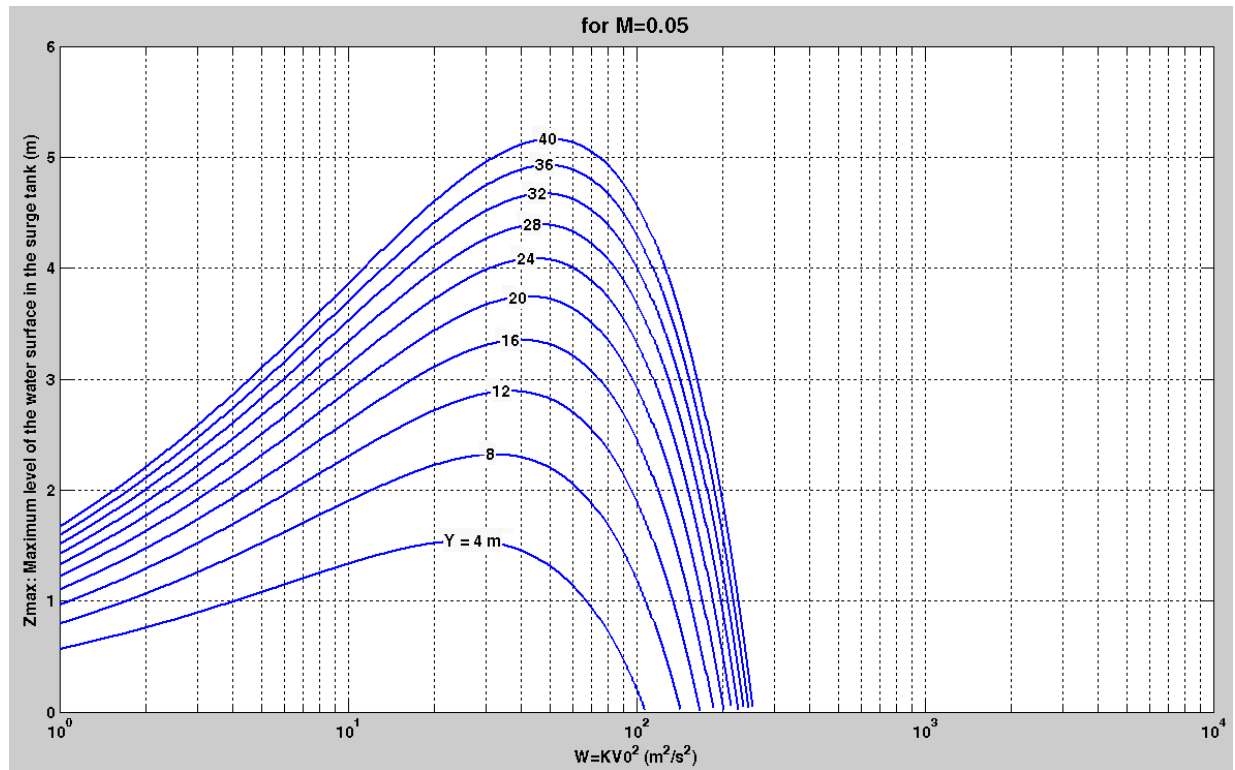
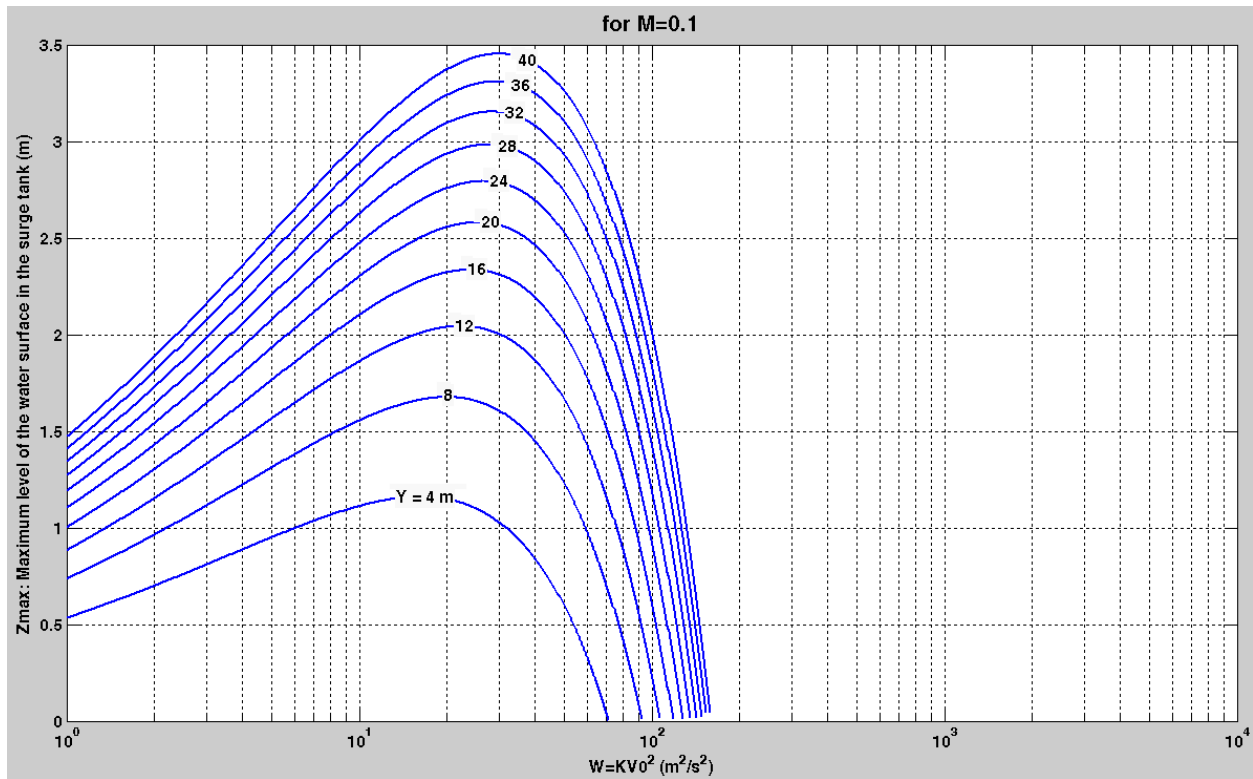
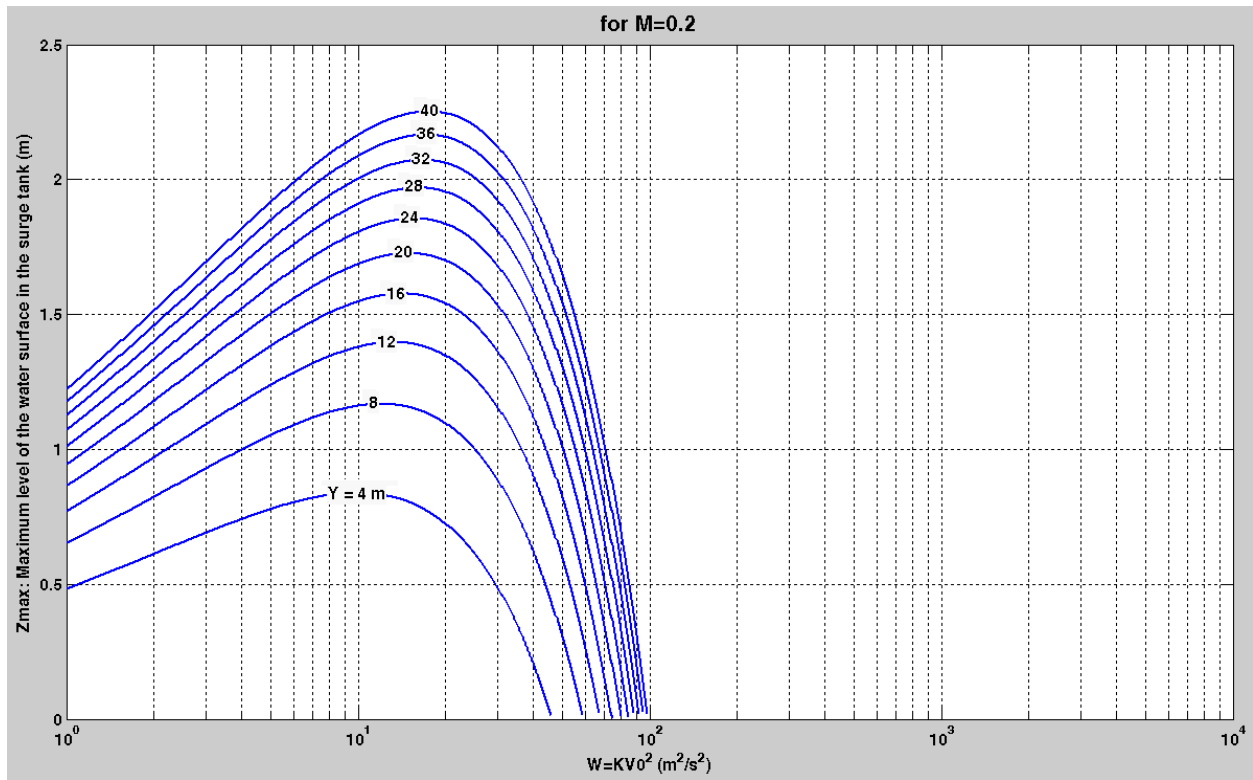
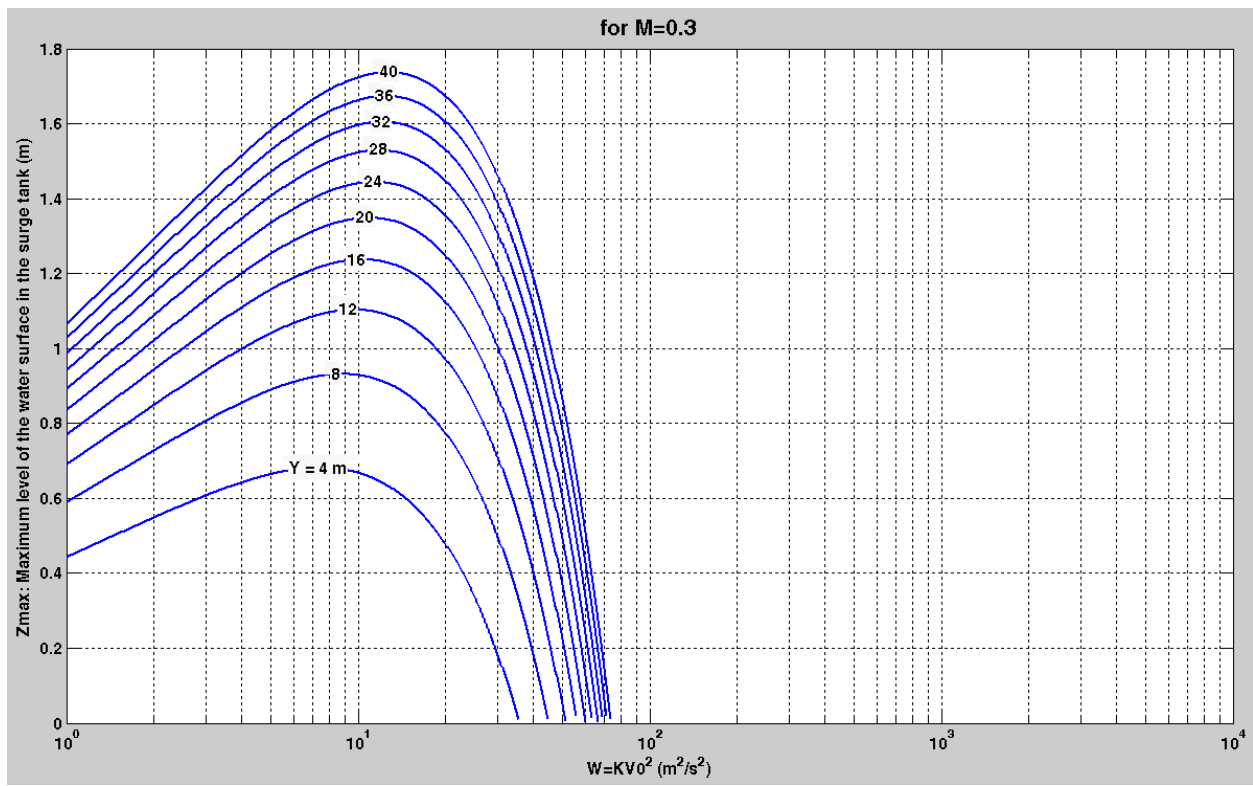


Figure 4.5: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.02$

Figure 4.6: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.03$ Figure 4.7: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.04$

Figure 4.8: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.05$ Figure 4.9: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.1$

Figure 4.10: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.2$ Figure 4.11: Graph of Z_{\max} vs. W for $M = 0.2$

4.6 Case Study

4.6.1 Application examples

All case study problems have been derived from Finnemore et al. (2002). This reference is well known and well respected in the civil engineering field.

Problem 1 (Figure 4.1-a): A 42-in diameter steel pipe MN 3600 ft long (flush inlet, $f = 0.017$) supplies water to a small power plant. The discharge (Q) = 200 cfs, the entrance loss coefficient $k_e = 0.5$, $JN = 100$ ft, and the elevations of J and the valve N are respectively 130 ft and 145 ft below the reservoir water surface. To protect against an instantaneous valve closure, what height would be required for a simple 6.5 ft diameter surge tank in order for it to not overflow? In the surge tank only, neglect the velocity head, minor losses, fluid friction, and inertial effects.

Problem 2: Recalculate Problem 1 using the same parameters, while also neglecting velocity head and minor losses in the pipeline.

Problem 3: Recalculate Problem 1 using a surge tank diameter of 10 ft.

Problem 4: Using the data found in Problem 1, calculate the diameter of the surge tank that will require a tank height of 165 ft to prevent surge overflow.

Problem 5: Using the parameters in Problem 2, calculate the diameter of surge tank that produce a surge requiring a tank height of 165 ft.

Problems above have been solved by using two (2) methods: successive approximation and using the charts presented in this paper. The aim of this exercise is to evaluate the precision and speed of applying our charting solutions versus using the successive approximation method.

4.6.2 Solutions using charts versus by successive approximation method

- Problem 1:

Using charts:

Original data: $Q = 200$ cfs = $5.663 \text{ m}^3/\text{s}$; $f = 0.017$; $k_e = 0.5$; $m = 0$ (simple surge tank); $D = 42$ in = 1.067 m;

$D_{s0} = 6.5$ ft = 1.981 m; $L = MJ = 3600 - 100 = 3500$ ft = 1066.8 m; $V_0 = 4Q/(\pi D^2) = 6.34$ m/s;

The elevations of J is $130 \text{ ft} = 39.62 \text{ m}$.

Using the equations listed below, the following values can be derived:

From Equation (4-2): $K = 18.5$

From Equation (4-6): $D_s = 1.981 \text{ m}$

From Equation (4-41): $W = 743.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$

From Equation (4-42): $Y = 16.72 \text{ m}$

From Equation (4-43): $M = 0$

And from Equation (4-46): $Z_m < 16.72 \text{ m}$

So by plotting values M, W and Y on Figure (4.2), one finds that: $Z_{\max} = 16.00 \text{ m}$;

Height of surge tank $= 39.62 + 16.00 = 55.62 \text{ m}$

Finnemore et al. (2002), by using successive approximation method, found $Z_{\max} = 16.05 \text{ m}$ and the height of surge tank $= 55.68 \text{ m}$ after 6 iterations.

- Problem 2:

Using charts:

By neglecting the velocity head and minor losses in the pipeline, $K = 17$

Using the equations listed below, the following values are derived:

From Equation (4-41): $W = 683.3 \text{ m}^2/\text{s}^2$

From Equation (4-42): $Y = 18.21 \text{ m}$

From Equation (4-46): $Z_m < 18.21 \text{ m}$

So, again, by plotting values M, W and Y on Figure (4.2), one finds that: $Z_{\max} = 17.25 \text{ m}$;

Height of surge tank $= 39.62 + 17.25 = 56.87 \text{ m}$

Finnemore et al. (2002), by using successive approximation method, found $Z_{\max} = 17.16 \text{ m}$ and height of the surge tank $= 56.78 \text{ m}$ after 7 iterations.

- Problem 3:

Using charts:

From Problem 1, for a surge tank diameter $D_{S0} = 10 \text{ ft} = 3.048 \text{ m}$, the following values were derived:

From Equation (4-41): $W = 743.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$

From Equation (4-42): $Y = 7.07 \text{ m}$

From Equation (4-46): $Z_m < 7.07 \text{ m}$

So by plotting values M , W , and Y into Figure (4.2), one finds $Z_{\max} = 7.00 \text{ m}$;

Height of surge tank $= 39.62 + 7.00 = 46.62 \text{ m}$.

Finnemore et al. (2002), using trial and error, found $Z_{\max} = 7.04 \text{ m}$ and surge tank height $= 46.66 \text{ m}$ after 4 iterations.

- Problem 4:

Using charts:

From Problem 1, for surge tank height $= 165 \text{ ft} = 50.29 \text{ m}$, $Z_{\max} = 50.29 - 39.62 = 10.67 \text{ m}$; from Equation (4-41), one obtains $W = 743.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$;

So by plotting values M , W and Z_{\max} onto Figure (4.2), one gets: $Y = 10.8 \text{ m}$;

And From Equation (4-42):

$$D_{S0} = \left(\frac{LD^2}{KY} \right)^{1/2} = 2.44 \text{ m}$$

Finnemore et al. (2002) found $D_{S0} = 2.46 \text{ m}$ after 4 iterations of successive approximation method.

- Problem 5:

Using charts:

By neglecting the velocity head and minor losses in the pipeline, $K = 17$. For a surge tank height $= 165 \text{ ft} = 50.29 \text{ m}$, $Z_{\max} = 50.29 - 39.62 = 10.67 \text{ m}$; one obtains $W = 743.6 \text{ m}^2/\text{s}^2$ from Equation (4-41).

So by plotting M , W and Z_{\max} values onto Figure (4.2), one finds: $Y = 10.9 \text{ m}$;

And from Equation (4-42):

$$D_{s0} = \left(\frac{LD^2}{KY} \right)^{1/2} = 2.55 \text{ m}$$

Finnemore et al. (2002) found $D_{s0} = 2.56 \text{ m}$ after 5 iterations of trial and error.

The comparative study between successive approximation method and chart resolution shows that the results are generally similar. The difference between both methods is less than 0.6%. The effect of imprecision in reading chart is the order of a few centimeters on the dimensions of surge tanks. The precision results of the reading chart in the case study are summarized in Table 4.1.

Table 4.1: Precision of the reading chart in the case study

Case study	Successive approximation iterations (Finnemore and Franzini 2002)	Precision of the reading chart
Problem 1	6	99.7%
Problem 2	7	99.5%
Problem 3	4	99.4%
Problem 4	4	99.2%
Problem 5	5	99.6%

4.7 Conclusions and recommendations

This paper introduced and developed analytical equations that can be used to design cylindrical and conical surge tanks, with accompanying charts that were based on the developed equations. A demonstration of the effectiveness of the charts was also shown in the case study using situational problems derived from Finnemore et al. (2002). It was shown that solutions obtained via successive approximation method required 26 iterations of complex calculations, while a simple reading on the chart would have sufficed in the design of a surge tank. Using the charts to help design the surge tanks were proven to help save time and increase efficiency, while reducing calculation errors.

The design charts are not a general purpose transient analysis tool because they are not powerful enough to analyze sophisticated pipeline systems. While obtaining solutions for the case study problems, inertial effects and fluid friction in the surge tank were neglected using the Darcy-

Weisbach friction factor f constant assumption. And then, the fluid is supposed incompressible. However, it would be interesting to study a case where the friction in the surge tank would be taken into consideration during the calculations of compressible fluid; this will determine its actual impact on the maximum height reached by the water.

4.8 Notation

The following symbols are used in this paper:

A	Cross-sectional area of the pipe or tunnel
A_s	Cross-sectional area of surge tank in the water surface
D	Diameter of pipe or tunnel
D_s	Width of water surface in the surge tank
D_{s0}	Diameter of the base of the surge tank
f	Darcy-Weisbach friction factor
g	Acceleration of gravity
L	Length of pipe or tunnel
m	Side slope in surge tank cross-section
Σk	Sum of the coefficients for all minor losses in the pipe or tunnel
t	Time
V	Water velocity
Z_0	Water level in the surge tank below reservoir level in the case of steady flow
Z^-	Water level in the surge tank below reservoir level
Z^+	Water level in the surge tank above reservoir level
Z_{\max}	Maximum level of the water surface in the surge tank

CHAPITRE 5 ARTICLE 2 : FINITE VOLUME SOLUTIONS TO THE WATER-HAMMER EQUATIONS IN CONSERVATION FORM INCORPORATING DYNAMIC FRICTION USING THE GODUNOV SCHEME

(Manuscript accepted and in process toward publication in the Journal of Hydraulic Engineering)

Aboudou Seck³ Ph.D.c.; Musandji Fuamba⁴ Ph.D., M.ASCE; René Kahawita⁵ Ph.D.

5.1 Abstract

Although derived from the principles of conservation of mass and momentum, the water-hammer equations integrating dynamic friction are almost never expressed in conservative form. This is because the pressure and volume discharge are used as variables but these are not conserved quantities, especially when the one-dimensional velocity profile is distorted from its assumed steady state shape due to the large accelerations imposed on the fluid particles across the cross section. This paper presents the derivation of the water-hammer equations in conservation form incorporating dynamic friction. With the dynamic friction taken into account, a source term appears in the basic partial differential equations as presented by Guinot. The numerical algorithm implements the Godunov approach to one-dimensional hyperbolic systems of conservation laws on a finite volume stencil. Two case studies are used to illustrate the influence of the various formulations. A comparative study between the analytical solution, the numerical solution with quasi-steady friction only, the numerical solution with dynamic friction, and the measurements has

³ Ph.D. Student, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7 (corresponding author). E-mail: aboudou.seck@polymtl.ca

⁴ Professor, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7.

⁵ Professor, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7.

been presented. The results indicate that the dynamic friction formulation reduces the peak water-hammer pressures when compared with a quasi-steady representation.

Keywords: Hydraulic transients; Water-hammer; Unsteady friction; Finite volume; Hyperbolic source term; Riemann problem; Godunov scheme; Wave attenuation.

5.2 Introduction

In the preliminary design of hydraulic systems, practicing engineers use a general framework to design equipment to prevent and/or mitigate any excessive pressures caused by water-hammer. The detailed design further attempts to refine the preliminary concept to elaborate the complete system response using various tools such as numerical modeling. In general, numerical simulation tools assume that the friction factor is considered steady or quasi-steady; this has the tendency to overestimate the water-hammer peak pressures since the primary mechanism that may significantly affect pressure waveforms is the unsteady friction. This results in oversizing of surge control equipment.

The origin of the theory of water-hammer goes back to the contributions of Menabrea (1858), who published a short note on the calculation of water pressures (Anderson 1976). However, due to the mathematical rigor and significant theories presented, the papers of Michaud (1878); (1903), Allievi (1903),(1913),(1932), Schnyder (1932) and Jaeger (1933) have been the source of inspiration for all studies on water-hammer. Water-hammer in hydropower systems and its stability problems were reviewed by Lescovich (1967), Roche (1975) and Chaudhry (1987). Research by Chaudhry et al. (1985), Finnemore et al. (2002) and Maghaddam (2004) provide implicit equations for analysing the water-hammer wave. Chaudhry et al. (1992) investigated the stability of water level oscillations during transient conditions in a surge tank. Kim (2010) applied a Genetic Algorithm (GA) coupled with an Impulse Response technique to derive the impedance functions for pipe systems equipped with a surge tank. Ramadan et al. (2013) investigated the effects of different parameters such as the friction loss coefficient, tank dimensions and total discharge on transient overpressures. Seck and Fuamba (2015) develop the analytical equations to design cylindrical and conical surge tanks, and provide user-friendly diagrams that are based on the equations developed. Their paper bridges the gap between the design concept and the detailed design phase for surge tanks but cannot be used as a general purpose tool for transient analysis

since certain key parameters such as the dynamic friction are not incorporated. Guinot (2003) focused on the theoretical and practical implementation of the Godunov approach to simulate water hammer using finite volumes with steady friction that gives rise to a non-hyperbolic source term.

In general, water-hammer models assume that the friction factor is steady or quasi-steady. However in transient flows with a constant pipe diameter, the one-dimensional velocity profile is distorted from its assumed steady state shape due to the large accelerations imposed on the fluid particles varying across the cross section. The equivalent friction then exceeds the value assumed at “steady-state”. Brunone et al. (1991) and subsequently Bergant et al. (2001) decomposed the dynamic friction into the sum of a quasi-steady and unsteady part. Bergant et al. (2008a) and (2008b) have experimentally investigated key parameters (unsteady friction, cavitation, fluid–structure interaction, viscoelastic behaviour of the pipe wall, leakage and blockage) that may affect the pressure waveform predicted by the classical theory of water-hammer. Bousso and Fuamba (2013) have numerically represented the unsteady friction in transient two-phase flow with a hyperbolic source term. Shamloo et al. (2015) review a quasi-steady model and four unsteady friction models (Zielke (1968), Vardy and Brown (2003), Trikha (1975) and Brunone et al. (1991)) for transient pipe flow. The Vardy and Brown model is limited to smooth pipes while the Zielke model is developed for transient laminar flow. The Trikha (1975) model presents a simplification of the Zielke (1968) model. The Brunone model appears to be the only one developed for all types of transient flows and all roughness values. Shamloo and Mousavifard (2015) use a two-dimensional finite difference method incorporating the $k-\omega$ turbulence model to study the dynamics of turbulence during different periods of water hammer in a polymeric pipe. Comparison of their model with experimental tests reveal however that the model underestimates the peak water-hammer pressures, which could pose a significant risk for pipe safety.

Although derived from the principles of conservation of mass and momentum, the water-hammer equations integrating dynamic friction are almost never expressed in conservation form. This is because the presence of the dynamic friction terms preclude presentation in the integral (conservation) form and also cause a source term to appear. The finite volume method which was developed for hyperbolic equations in conservation form (eg. the Euler equations in fluid dynamics) has to be adapted to tackle systems that are not in ‘proper’ conservation form. Hyperbolic systems admit weak solutions in the form of discontinuities or ‘shocks’. The treatment of these discontinuities requires special treatment of the flux function to avoid spurious oscillations.

A large body of literature is available on finite volume schemes developed to handle the solution in the vicinity of these shocks. Among the most modern numerical schemes are Total Variation Diminishing (TVD) (Zijlema and Wesseling 1998), Essentially Non-Oscillatory (ENO) (Harten et al. 1987) and Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) schemes ((Liu et al. 1994), (Jiang and Shu 1995)). One limitation of the TVD schemes is unsatisfactory performance near extrema ((Osher and Chakravarthy 1984),(Titarev and Toro 2003), (Park et al. 2010). ENO and WENO schemes have been developed to overcome this limitation and provide a better scheme that can handle both sharp interfaces and smooth gradients (Shu 1998). According to Gallerano and Cannata (2011) and Gallerano et al. (2012), ENO and WENO shock capturing higher-order schemes for the solution of hyperbolic systems can be considered as a further development of ideas that gave rise to the TVD schemes. The original contribution of this paper is to present the derivation of the water-hammer equations in conservation form incorporating dynamic friction. The hyperbolic system is then solved using a finite volume scheme. The Godunov scheme was retained to obtain the numerical solutions to the present problem.

It is hoped that this paper will help practical engineers who are at the detailed design phase, to further safely optimize any incorporated surge controls by assisting in the development and numerical simulation of the water-hammer equations with dynamic friction.

5.3 Methodology

This paper focuses on implementation of the Godunov approach to one-dimensional hyperbolic systems of conservation laws that describe the phenomenon of water-hammer. It is first order accurate in both space and time. In the present context, given the simple geometry and non-varying fluid properties (the fluid is slightly compressible), the basic Godunov Scheme is considered adequate by the authors.

First the computation of the fluxes is detailed followed by a description of the complete numerical algorithm. Finally, two case studies are investigated with comparisons being made between an analytical solution, the numerical solution with quasi-steady friction, the numerical solution with dynamic friction and experimental results.

5.4 Governing Equations

For a pipe of constant cross-section, the one-dimensional flow equations presented in vector form (Guinot (2003)) are:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} &= \mathbf{S} \\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mu \\ Q_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_m \\ A_0 p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f|V|V \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5-1)$$

Where t is time, x the unit vector in the x -direction, \mathbf{U} the flow variable vector, \mathbf{F} the flux vector in the x -direction and \mathbf{S} the source term vector. μ is the mass of fluid per unit length of pipe, Q_m the mass discharge, A_0 the cross-sectional area of pipe, p the pressure, V the fluid velocity and f the friction coefficient dependant on the pipe roughness and the fluid viscosity. In fact, in the pressurised pipes, the momentum discharge Q_m^2/μ can be neglected because the most of the momentum flux is due to the pressure force $A_0 p$.

For unsteady friction in transient flow with a constant pipe diameter, the friction factor f is split into the sum of the quasi-steady f_q and unsteady f_u part i.e. $f=f_q+f_u$ as in the model by Brunone et al. (1991) and modified by Bergant et al. (2001) :

$$f = f_q + \frac{\sqrt{C^*}D}{2|V|V} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a \operatorname{sign}(V) \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \right) \quad (5-2)$$

Where a is the celerity of the pressure waves, D the diameter of the pipe and C^* the Vardy's shear decay constant depending on the flow regime (Reynolds number R_e) expressed as:

$$C^* = \begin{cases} 0.00476 & \text{if laminar flow} \\ \frac{7.41}{R_e^{\log(14.3/R_e^{0.05})}} & \text{if turbulent flow} \end{cases} \quad (5-3)$$

Equation (5-2) may be rewritten in terms of the flow variables μ and Q_m as:

$$f = f_q + \frac{\sqrt{C^*}D}{2|V|V} \left[\left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial Q_m}{\partial t} - \frac{Q_m}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial t} \right) + a \psi \left(\frac{1}{\mu} \frac{\partial Q_m}{\partial x} - \frac{Q_m}{\mu^2} \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) \right] \quad (5-4)$$

Where ψ is expressed as:

$$\psi = \begin{cases} +1 & \text{if } V \frac{\partial V}{\partial x} > 0 \\ -1 & \text{if } V \frac{\partial V}{\partial x} < 0 \end{cases} \quad (5-5)$$

For turbulent flow, the Colebrook-White Equation may be iteratively solved for the quasi-steady part f_q of the friction factor:

$$\frac{1}{\sqrt{f_q}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k_s/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f_q}} \right) \quad (5-6)$$

In which k_s = absolute roughness of the pipe.

Streeter and Wylie (1993) provide the following expression for the celerity (sonic velocity) a in a circular pipe:

$$a = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{DE_V}{eE}}} \quad (5-7)$$

Where E_V is the bulk modulus of elasticity, ρ the mass density, e and E respectively the pipe wall thickness and Young's modulus of elasticity for the pipe material.

Equation (5-7) may be rewritten:

$$a = \sqrt{\frac{E_V A_0}{\mu}} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{DE_V}{eE}}} \quad (5-7a)$$

By taking into consideration the unsteady friction, Equation (5-1) may be written as:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{2\mu}{2\mu + \sqrt{C^*}D} A_0 p \right] - \frac{\sqrt{C^*}D}{2\mu + \sqrt{C^*}D} a \psi V \frac{\partial \mu}{\partial x} \dots \\ + \frac{\sqrt{C^*}D}{2\mu + \sqrt{C^*}D} (a \psi - V) \frac{\partial Q_m}{\partial x} = - \frac{2\mu}{2\mu + \sqrt{C^*}D} f_q |V|V \end{cases} \quad (5-8)$$

In pipe flows, the flow velocity V is negligible compared with a (the celerity of the pressure waves). We also note that $\frac{2\mu}{2\mu + \sqrt{C^*D}} \approx 1$ because the term $\sqrt{C^*D}$ is negligible compared with 2μ .

Equation (5-8) may now be rewritten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (A_0 p) - \frac{\sqrt{C^*D}}{2\mu + \sqrt{C^*D}} a \psi V \frac{\partial \mu}{\partial x} + \frac{\sqrt{C^*D}}{2\mu + \sqrt{C^*D}} (a \psi) \frac{\partial Q_m}{\partial x} = -f_q |V| V \end{array} \right. \quad (5-9)$$

In conservation form the governing equations (5-9) may be written respectively:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \\ \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mu \\ Q_m \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_m \\ A_0 p \end{bmatrix}, \mathbf{R} = k a \psi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_q |V| V \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (5-10)$$

Where $k = \frac{\sqrt{C^*D}}{2\mu + \sqrt{C^*D}}$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S} \\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k \frac{A_0 p}{\mu} + a^2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a^2 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \quad (5-11)$$

This is the general form of the water hammer equations with unsteady friction.

In Equation (5-11), $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ is the Jacobian matrix of \mathbf{F} with respect to the vector \mathbf{U} . In the expression for the matrix \mathbf{A} , $k \frac{A_0 p}{\mu} \ll a^2$. The general Equation (5-10) is equivalent to the Guinot Equation (5-1) if unsteady friction is not considered. The inclusion of the unsteady friction results in the appearance of the quasilinear term $\mathbf{R} \partial \mathbf{U} / \partial x$ in the hyperbolic system (5-10) thus destroying the integral form of the equations.

The Godunov method is a conservative numerical scheme for solving Partial Differential Equations (PDE) in computational fluid dynamics. This conservative finite-volume method solves an exact or approximate Riemann problem (depending on the friction formulation) at each inter-cell

boundary. It is first order accurate in both space and time. The next section describes the solution process for these equations with the Godunov method.

5.5 Numerical solution

Guinot (2003) as well as Bousso and Fuamba (2013) have provided the procedure for solving PDE's by Godunov's method using the time splitting technique. Equation (5-10) is solved in three steps: the first step uses the Guinot solution for the conservation part of the PDE (5-10):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (5-12)$$

The second step solves for the non-conservative term of (5-10):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (5-13)$$

The final step uses the Toro (2001) and Guinot (2003) treatment of the non-hyperbolic source term of (5-10):

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S} \quad (5-14)$$

5.5.1 Guinot's solutions at the internal cells and at the boundaries for the conservation terms

The conservation component of Equation (5-10) is Equation (5-12). It is the same conservation component as in Guinot's (2003) Equation (5-1). For the internal cells, Guinot (2003) constructs the Riemann problem $\mathbf{U}(x, t^n)$ and presents the solution $\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}$ of this Riemann problem in Equation (5-15) computing the flux $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ between the time intervals t^n and t^{n+1} according to Equation (5-16).

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} \mu_{i+1/2}^{n+1/2} \\ Q_{m,i+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_i^n + \mu_{i+1}^n + (Q_{m,i}^n - Q_{m,i+1}^n)/a \\ (\mu_i^n + \mu_{i+1}^n)a + Q_{m,i}^n - Q_{m,i+1}^n \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}) = \begin{bmatrix} Q_{m,i+1/2}^{n+1/2} \\ A_0 p_{ref} + a^2 (\mu_{i+1/2}^{n+1/2} - \mu_{ref}) \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

Where p_{ref} is a reference pressure at which the density ρ_{ref} is known. μ_{ref} is calculated as $\mu_{ref} = A_0 \rho_{ref}$.

The flux solutions for a prescribed pressure p_b at the left-hand ($p_{b,L}$) and the right-hand ($p_{b,R}$) boundary are respectively given by:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_{m,1}^n + (\mu_{1/2}^{n+1/2} - \mu_1^n) a \\ A_0 p_{b,L} \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$\mathbf{F}_{N+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_{m,N}^n + (\mu_N^n - \mu_{N+1/2}^{n+1/2}) a \\ A_0 p_{b,R} \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

In Equations (5-17) and (5-18), p_b represents a pressure to be prescribed at the boundary. The mass of fluid per unit length of pipe $\mu_{1/2}^{n+1/2}$ (at the left-hand) and $\mu_{N+1/2}^{n+1/2}$ (at the right-hand) is obtained from the prescribed pressure p_b using:

$$\mu_b = \mu_{ref} + \frac{A_0}{a^2} (p_b - p_{ref}) \quad (5-19)$$

The fluxes for a prescribed discharge Q_b at the left-hand and the right hand boundary are respectively given by:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_b \mu_{1/2}^{n+1/2} / A_0 \\ A_0 p_{ref} + (\mu_{1/2}^{n+1/2} - \mu_{ref}) a^2 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

$$\mathbf{F}_{N+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_b \mu_{N+1/2}^{n+1/2} / A_0 \\ A_0 p_{ref} + (\mu_{N+1/2}^{n+1/2} - \mu_{ref}) a^2 \end{bmatrix} \quad (5-21)$$

Where $\mu_{1/2}^{n+1/2}$ in Equation (5-20) and $\mu_{N+1/2}^{n+1/2}$ in Equation (5-21) are obtained respectively from:

$$\mu_{1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_{m,1}^n - a\mu_1^n}{\frac{Q_b}{A_0} - a} \quad (5-22)$$

$$\mu_{N+1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_{m,N}^n + a\mu_N^n}{\frac{Q_b}{A_0} + a} \quad (5-23)$$

For all cells, the balance is performed omitting the source term using:

$$\mathbf{U}_i^{n+1,x} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} \right) \quad (5-24)$$

5.5.2 Solution for the hyperbolic source term at the internal cells

The intermediate solution $\mathbf{U}_i^{n+1,x}$ is taken as a starting point for the computation of the hyperbolic source term. This non-hyperbolic source term is solved according to the procedure detailed below.

In Equation (5-13), $\mathbf{R} = ka\psi \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -V & 1 \end{bmatrix}$. The two eigenvalues $\lambda^{(1)}$ and $\lambda^{(2)}$ of the matrix \mathbf{R} are therefore:

$$\lambda^{(1)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \psi = 1 \\ -ka, & \text{if } \psi = -1 \end{cases} \quad (5-25)$$

$$\lambda^{(2)} = \begin{cases} ka, & \text{if } \psi = 1 \\ 0, & \text{if } \psi = -1 \end{cases} \quad (5-26)$$

The matrix \mathbf{K} of the \mathbf{R} eigenvectors is given by:

$$\mathbf{K} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ V & 1 \end{bmatrix}, & \text{if } \psi = 1 \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & V \end{bmatrix}, & \text{if } \psi = -1 \end{cases} \quad (5-27)$$

This yields the following generalised Riemann invariants:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mu}{1} &= \frac{dQ_m}{V}, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{d\mu}{0} &= \frac{dQ_m}{1}, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= ka \end{aligned} \right\} \text{for } \psi = 1 \quad (5-28)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mu}{0} &= \frac{dQ_m}{1}, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= -ka \\ \frac{d\mu}{1} &= \frac{dQ_m}{V}, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } \psi = -1 \quad (5-29)$$

Noting that $dQ_m = \mu dV + V d\mu$, the system (5-28) and (5-29) may be rewritten as:

$$\left. \begin{aligned} d\left(\frac{Q_m}{\rho}\right) &= 0, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= 0 \\ d\mu &= 0, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= ka \end{aligned} \right\} \text{for } \psi = 1 \quad (5-30)$$

$$\left. \begin{aligned} d\mu &= 0, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= -ka \\ d\left(\frac{Q_m}{\rho}\right) &= 0, & \text{across } \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{for } \psi = -1 \quad (5-31)$$

Consider the Riemann problem as follows:

$$\mathbf{U}(x, t^n) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^{n+1,x}, & \text{if } x \leq x_{i+1/2} \\ \mathbf{U}_{i+1}^{n+1,x}, & \text{if } x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (5-32)$$

The solution \mathbf{U}^h of this Riemann problem is given by:

$$\text{for } \psi = 1, \quad \mathbf{U}^h(x, t^{n+1}) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^{n+1,x}, & \text{if } x < x_{i+1/2} \\ \mathbf{U}_{i+1/2}^*, & \text{if } x_{i+1/2} \leq x < x_{i+1/2} + ka\Delta t \\ \mathbf{U}_{i+1}^{n+1,x}, & \text{if } x \geq x_{i+1/2} + ka\Delta t \end{cases} \quad (5-33)$$

$$\text{Where } \mathbf{U}_{i+1/2}^* = \frac{1}{A_0} \begin{bmatrix} \mu_{i+1}^{n+1,x} \\ A_0^2 \frac{\mu_{i+1}^{n+1,x}}{\mu_i^{n+1,x} \mu_i^{n+1,x}} Q_{m_i}^{n+1,x} \end{bmatrix}$$

$$\text{for } \psi = -1, \mathbf{U}^h(x, t^{n+1}) = \begin{cases} \mathbf{U}_i^{n+1,x}, & \text{if } x \leq x_{i+1/2} - ka\Delta t \\ \mathbf{U}_{i+1/2}^*, & \text{if } x_{i+1/2} - ka\Delta t < x \leq x_{i+1/2} \\ \mathbf{U}_{i+1}^{n+1,x}, & \text{if } x > x_{i+1/2} \end{cases} \quad (5-34)$$

$$\text{Where } \mathbf{U}_{i+1/2}^* = \frac{1}{A_0} \left[A_0^2 \frac{\mu_i^{n+1,x}}{\mu_{i+1}^{n+1,x} \mu_{i+1}^{n+1,x}} Q_{m_{i+1}}^{n+1,x} \right]$$

The value of $\mathbf{U}_i^{n+1,x}$ is obtained from:

$$\mathbf{U}_i^{n+1,x} = \frac{1}{\Delta x_i} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{U}^h(x, t^{n+1}) dx \quad (5-35)$$

By substituting Equations (5-33) and (5-34) into Equation (5-35), the following equation is obtained:

$$\mathbf{U}_i^{n+1,h} = \left(1 + \frac{ka\psi\Delta t}{\Delta x_i} \right) \mathbf{U}_i^{n+1,x} - \frac{ka\psi\Delta t}{\Delta x_i} \mathbf{U}_{i+1/2}^* \quad (5-36)$$

5.5.3 Discretization of the non-hyperbolic source term

Taking the provisional solution $\mathbf{U}_i^{n+1,h}$ as the initial state, the solution \mathbf{U}_i^{n+1} of the non-hyperbolic source term is presented by Toro (2001), Guinot (2003), Bousso and Fuamba (2013) in the following form:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+1,h} + \mathbf{S}(\mathbf{U}_i^{n+1,h})\Delta t \quad (5-37)$$

Where $\mathbf{S}(\mathbf{U}_i^{n+1,h})$ is calculated by using $\mathbf{U}_i^{n+1,h}$ in Equation (5-1) of the source term.

5.5.4 Computational time step

Since the scheme is explicit, the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition for stability must be respected, i.e., the maximum permissible time step Δt_{Max} as presented by Guinot (2003) is as follows:

$$\Delta t_{Max} = \text{Min} \left[\text{Min}_{i=1,\dots,N} \left(\frac{\Delta x_i}{a} \right), \Delta t_{Max,S} \right] \quad (5-38)$$

The velocity has been neglected compared with the wave celerity, and Where the maximum permissible time step $\Delta t_{Max,S}$ for the source term is as follows:

$$\Delta t_{Max,S} = \text{Min}_{i=1,\dots,N} \left[-2 \frac{\mathbf{u}_i^{n+1,h}}{\mathbf{s}(\mathbf{u}_i^{n+1,h})} \right]$$

5.5.5 Water-hammer wave attenuation ratio

The water-hammer wave attenuation ratio η is computed from:

$$\eta_i^{n+1}(\%) = \left(1 - \frac{|p_i^{n+1} - p_{b,L}|}{p_{b,L}} \right) 100 \quad (5-39)$$

As t increases ($t \rightarrow \infty$) and assuming no pipe failure, the water-hammer wave is completely attenuated in the pipe.

Then, η_i^{n+1} approaches 100% according to:

$$\text{if } t \rightarrow \infty; \eta_1^\infty \approx \eta_2^\infty \approx \dots \approx \eta_N^\infty \approx \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{|p_i^{n+1} - p_{b,L}|}{p_{b,L}} \right) 100 \approx 100\% \quad (5-40)$$

5.5.6 Resolution algorithm

The proposed algorithm is presented in the following (Fig. 5.1):

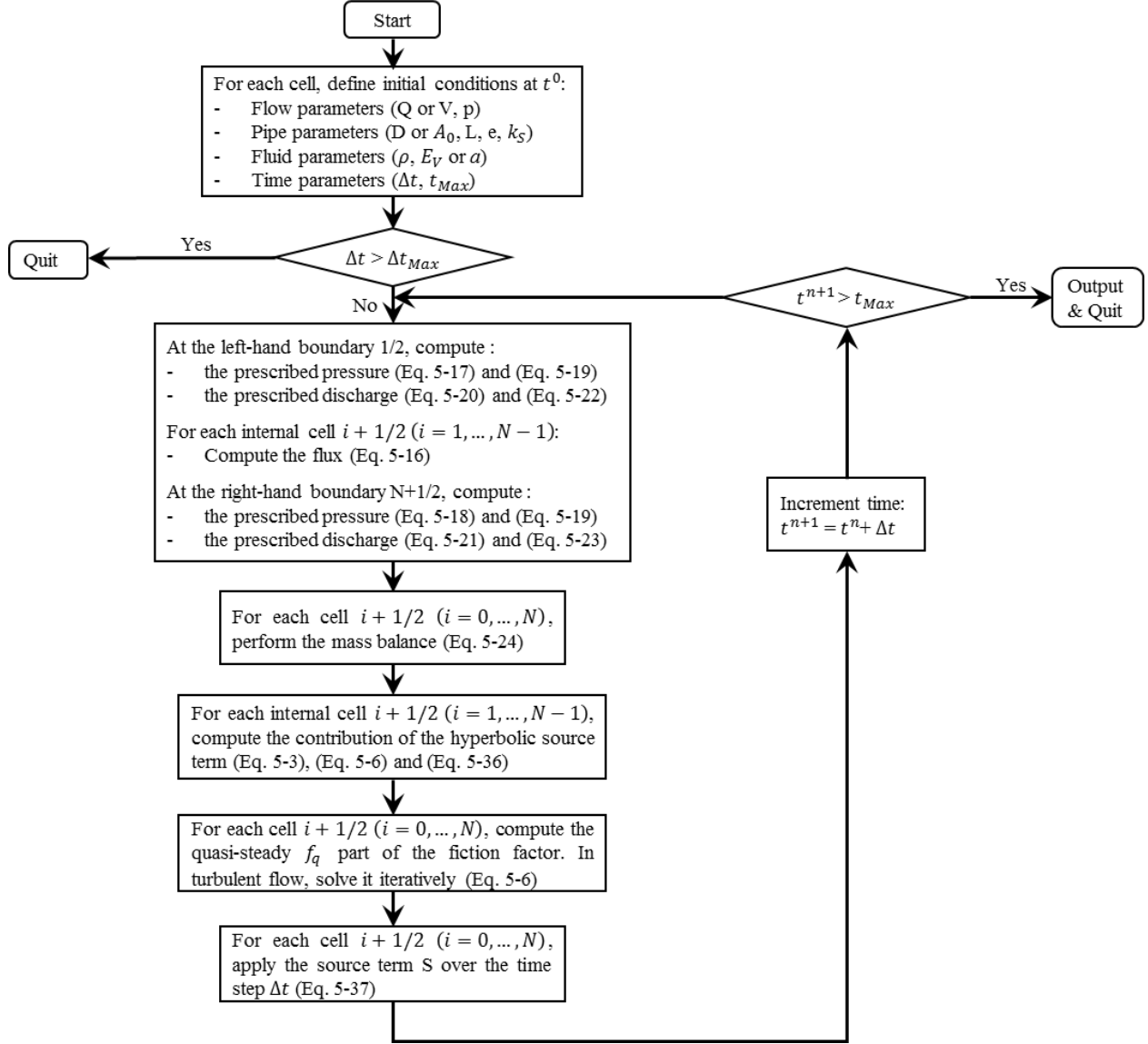


Figure 5.1: Schematic of the proposed algorithm

5.6 Results and discussion

Two case studies (1) – The sudden opening of an upstream valve and (2) – Sudden closure of a downstream valve has been simulated. For the second case study, the numerical results have been compared with data from two recent experimental tests conducted by Brunone and Berni (2010) which are considered to be of good quality. The second case represents the classic case of water-hammer.

5.6.1 Case 1: Sudden opening of an upstream valve

5.6.1.1 Physical data

The physical data for the case study is adapted from Guinot (2003). The pressure waves and the discharges due to the sudden opening of an upstream valve of a pipe coupled to a reservoir at constant head, higher than that of the prevailing pressure in the pipe is computed. The end of the pipe is considered closed. Initial conditions specify all velocities to be zero. In the Guinot example, the friction is assumed constant, consequently the source term does not appear. The physical data are given as follows (these constitute the initial conditions):

Pipe diameter :	100 mm
Pipe length :	50 m
Absolute roughness of the pipe :	0 mm (smooth pipe)
Sonic Velocity (celerity) :	1000 m/s
Initial pressure in the pipe :	10^5 Pa
Pressure at the left-hand boundary :	10^6 Pa
Discharge at the right-hand boundary:	0 m ³ /s
Initial discharge in the pipe :	0 m ³ /s
Water density :	1000 kg/m ³

5.6.1.2 Results and Discussion

The equations for water-hammer with unsteady friction were solved using the Godunov scheme detailed above. In keeping with the objectives of this paper, results were obtained for the analytical resolution, the numerical solution with quasi-steady friction only and the numerical solution with dynamic friction. A time step of $\Delta t = 0.0002$ s was used. Comparison between the results indicates that the inclusion of all components of the friction has an influence on the pressure profiles at pipe midpoint (Figure 5.2) and the flow oscillation profiles at pipe midpoint and at the downstream end (Figure 5.3a, 5.3b).

Due to damping, the waves will be of decreasing amplitude until the final equilibrium pressure is reached. Also, the dynamic friction tends to rapidly attenuate the magnitude of the overpressures. Comparisons at the middle of the pipe and at the downstream end, indicate that inclusion of the dynamic friction causes the peak pressure to decay at a rate faster than that with the quasi-steady friction term only.

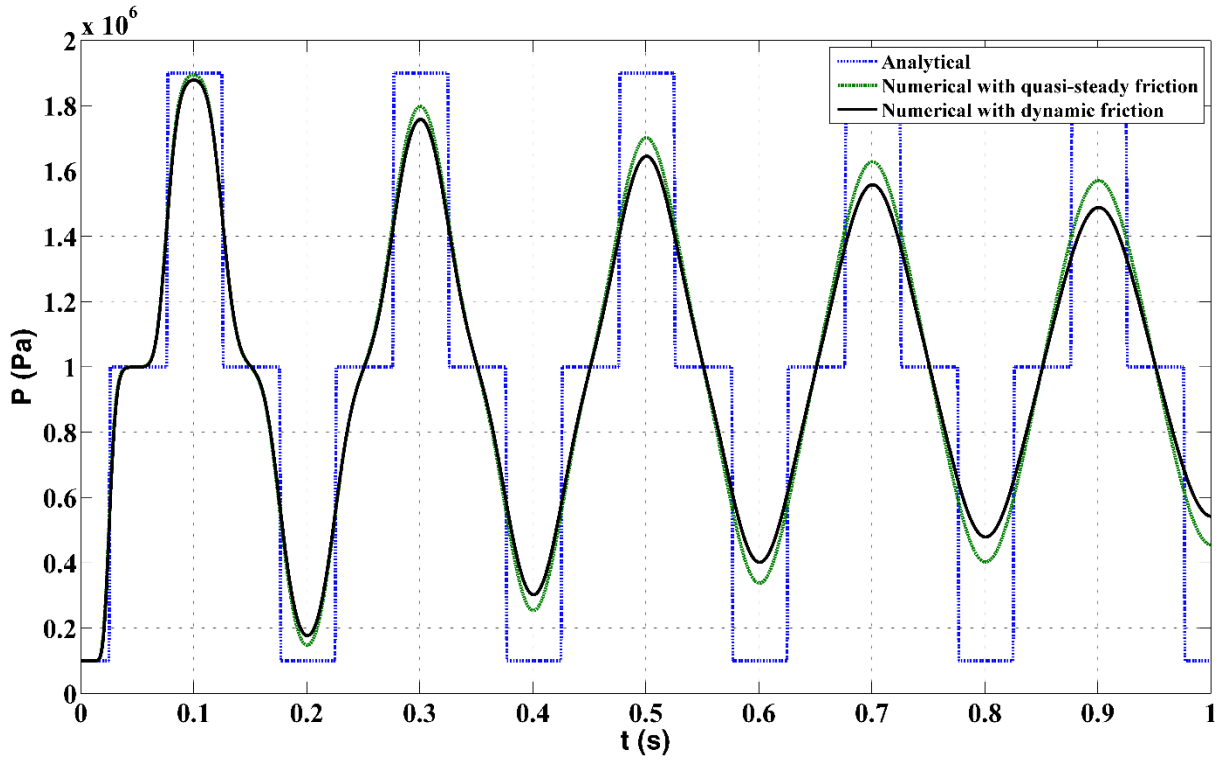


Figure 5.2: Comparison of pressure profiles at pipe midpoint ($\Delta t = 0.0002$ s, $N = 50$) between the various formulations for the friction term

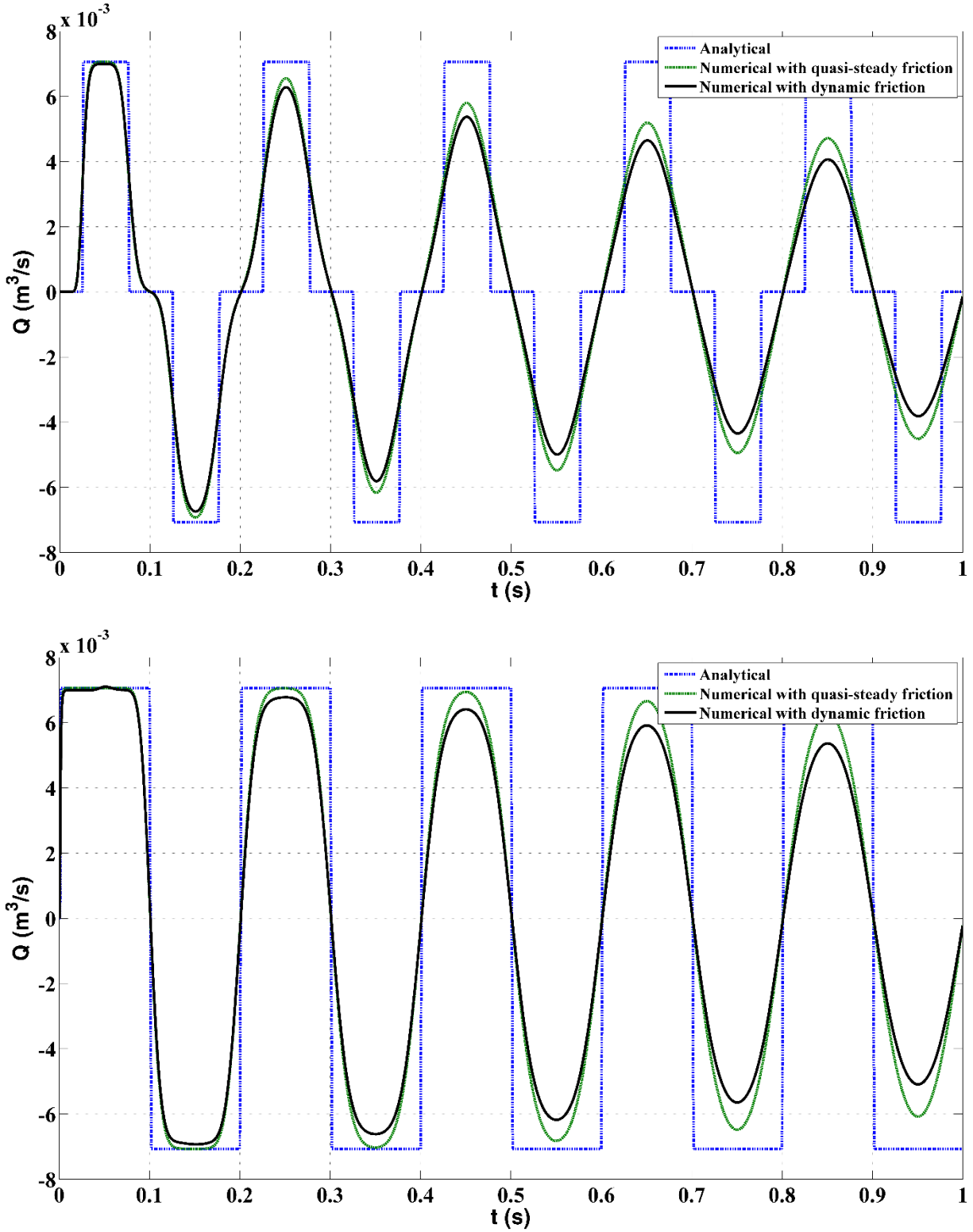


Figure 5.3: Comparison of discharge profiles ($\Delta t = 0.0002$ s, $N = 50$) between the various formulations for the friction term: a) pipe midpoint; b) downstream of the reservoir

5.6.2 Case 2: Sudden closure of a downstream valve

5.6.2.1 Experimental setup

The results of experimental studies conducted by Brunone and Berni (2010) are compared with the computational results. For two cases of initial conditions, a transient event is initiated by the rapid closure of a downstream valve in a pipe coupled to a constant head reservoir under initially steady flow conditions. The experimental setup is composed of a 352 m long pipe with an inner diameter of 0.0933 m and a thickness of 8.9 mm that connects an upstream the air vessel which is at a (constant) head. The celerity has been estimated as equal to 332.53 m/s. The pressure waves and discharge have been computed and compared with the corresponding experimental values at section #1 (distance $x=13.76$ m downstream the reservoir), section #2 (distance $x=180$ m downstream of reservoir) and section #3 (just upstream of the valve).

The initial conditions for test No 1 and test No 2 are given as follows:

Test No 1:

Reynolds Number :	45200
Initial discharge in the pipe :	3.32 L/s
Pressure at the reservoir :	21.45 m
Pressure at section #3 :	20.35 m

Test No 2:

Reynolds Number :	60700
Initial discharge in the pipe :	4.46 L/s
Pressure at the reservoir :	20.95 m
Pressure at section #3 :	19.12 m

5.6.2.2 Results and Discussion

The water-hammer equations with unsteady friction were solved using the Godunov scheme detailed above. In keeping with the objectives of this paper, results were obtained for the analytical resolution, the numerical solution with quasi-steady friction only and the numerical solution with dynamic friction using a time step of $\Delta t = 0.002$ s. These results are compared with the experimental measurements. Comparison between the results indicates that the inclusion of all components of the friction has an influence on the pressure profiles (Figures 5.4a, 5.4b, 5.6a, 5.6b) and the flow oscillation profiles (Figures 5.5a, 5.5b, 5.7a, 5.7b). At valve (Figures 5.4b, 5.6b) the peaks pressure are shown as sloping upward in high pressure and downward in low pressure. The quasi-steady friction model and dynamic friction model are able to reproduce almost exactly the evolution of the typical shape of the pressure oscillations. However, the quasi-steady friction model underestimates the damping and dispersion predicted by the physically more accurate dynamic friction model. The dynamic friction tends to rapidly attenuate the magnitude of the overpressures. At the middle of the pipe and at the downstream end, inclusion of the dynamic friction causes the peak pressure to decay at a faster rate than that with the quasi-steady friction term only. It is expected that better agreement between measured and computed dynamic friction profiles would be obtained if other key parameters have to be properly modelled and incorporated into the formulation. The resolution will be able to better capture discontinuities in the computed profiles.

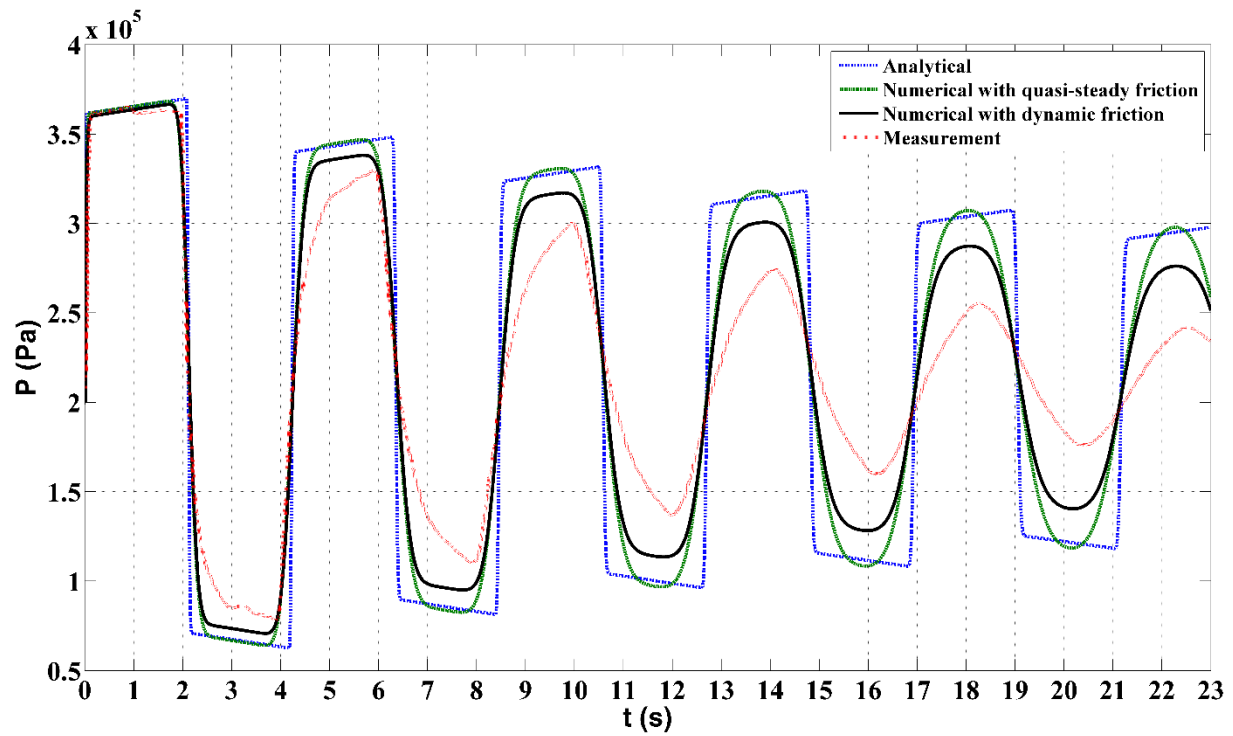
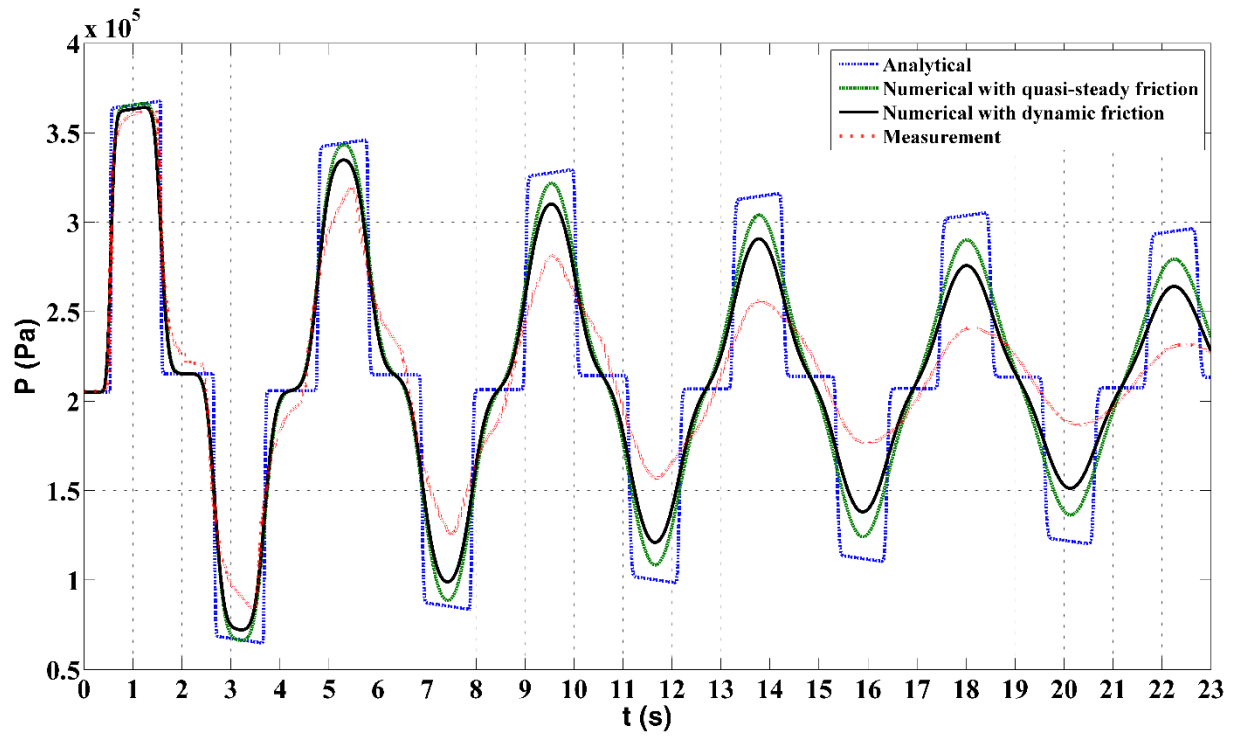


Figure 5.4: Test No 1: Comparison of pressure profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #2; b) section #3

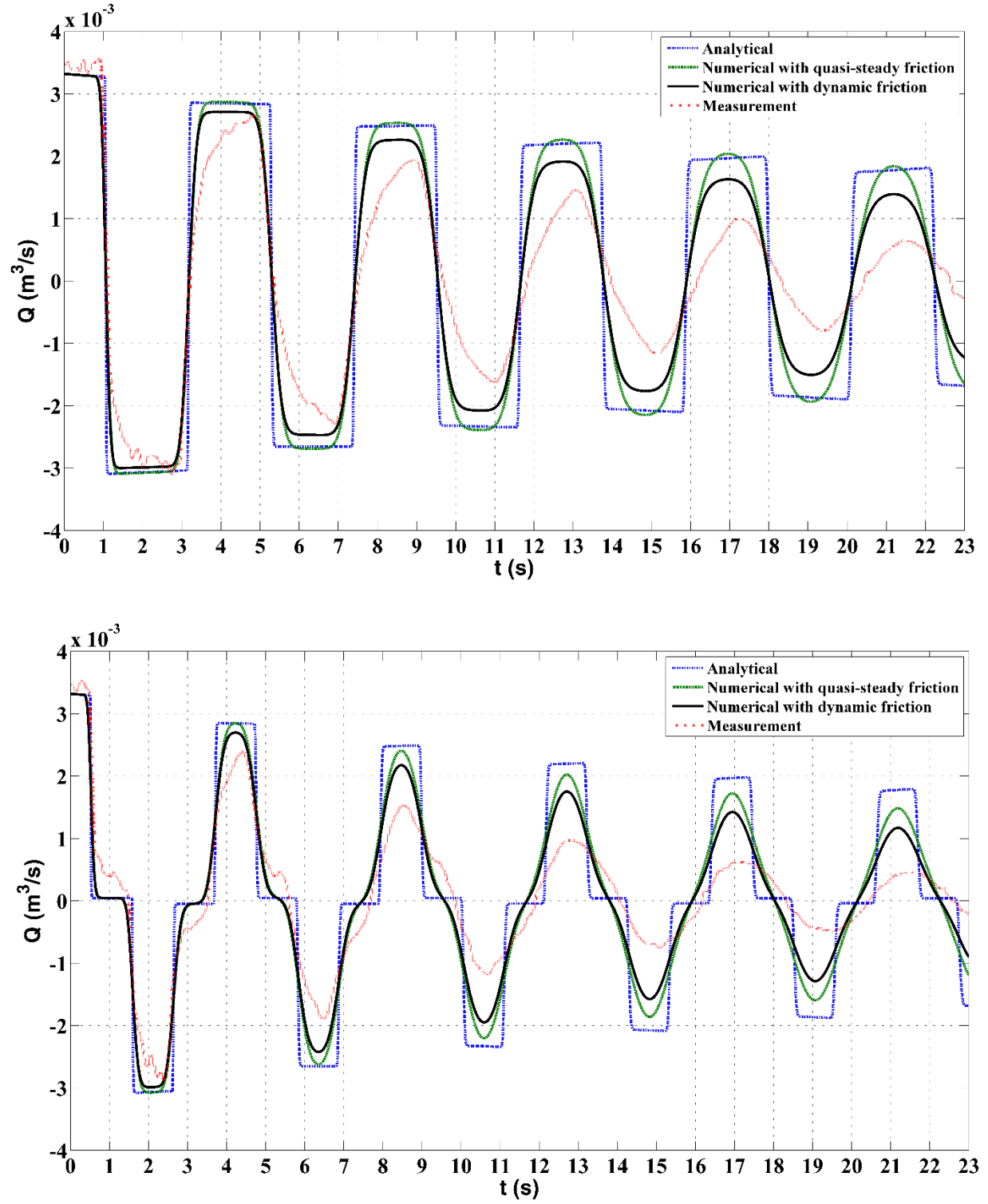


Figure 5.5: Test No 1: Comparison of discharge profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #1; b) section #2

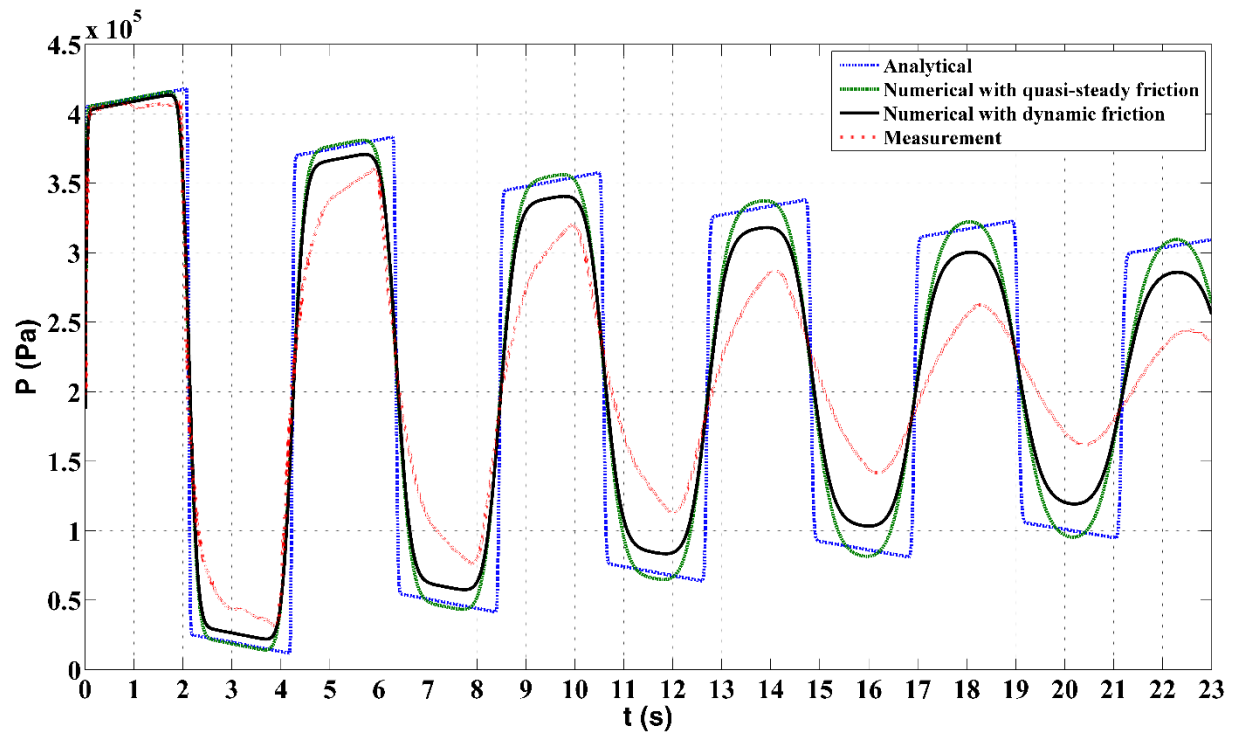
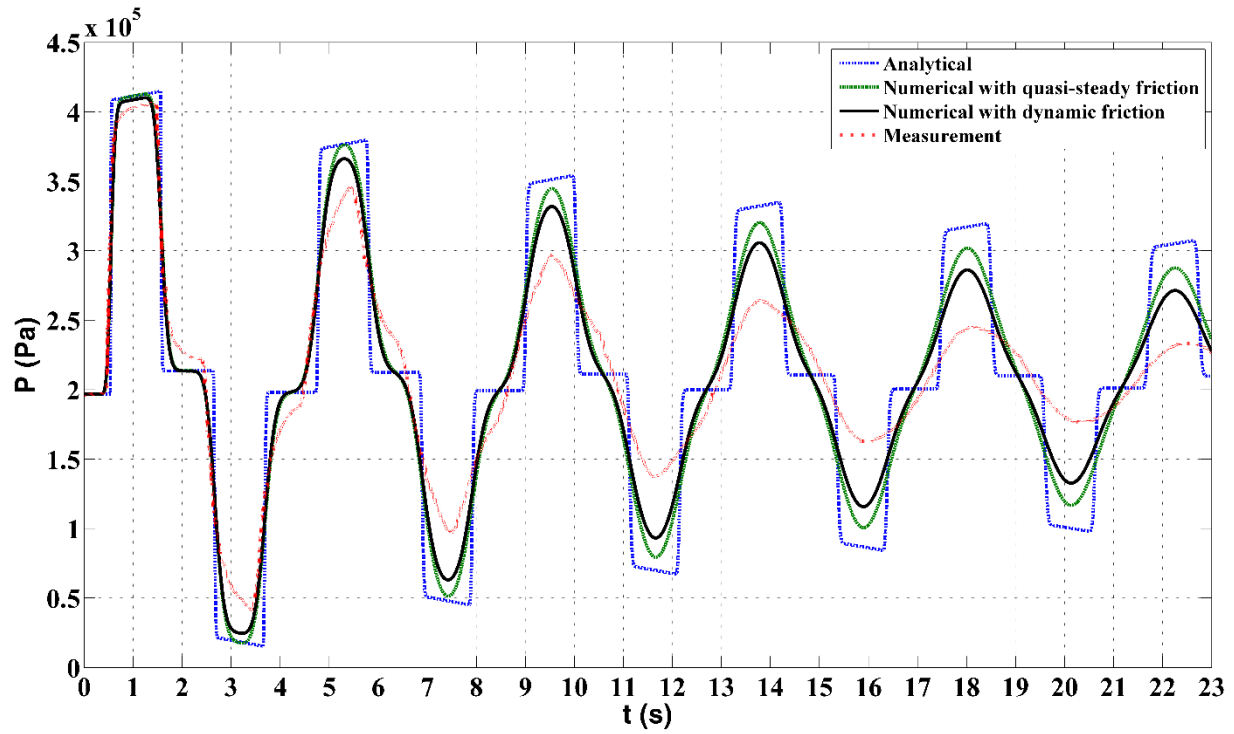


Figure 5.6: Test No 2: Comparison of pressure profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #2; b) section #3

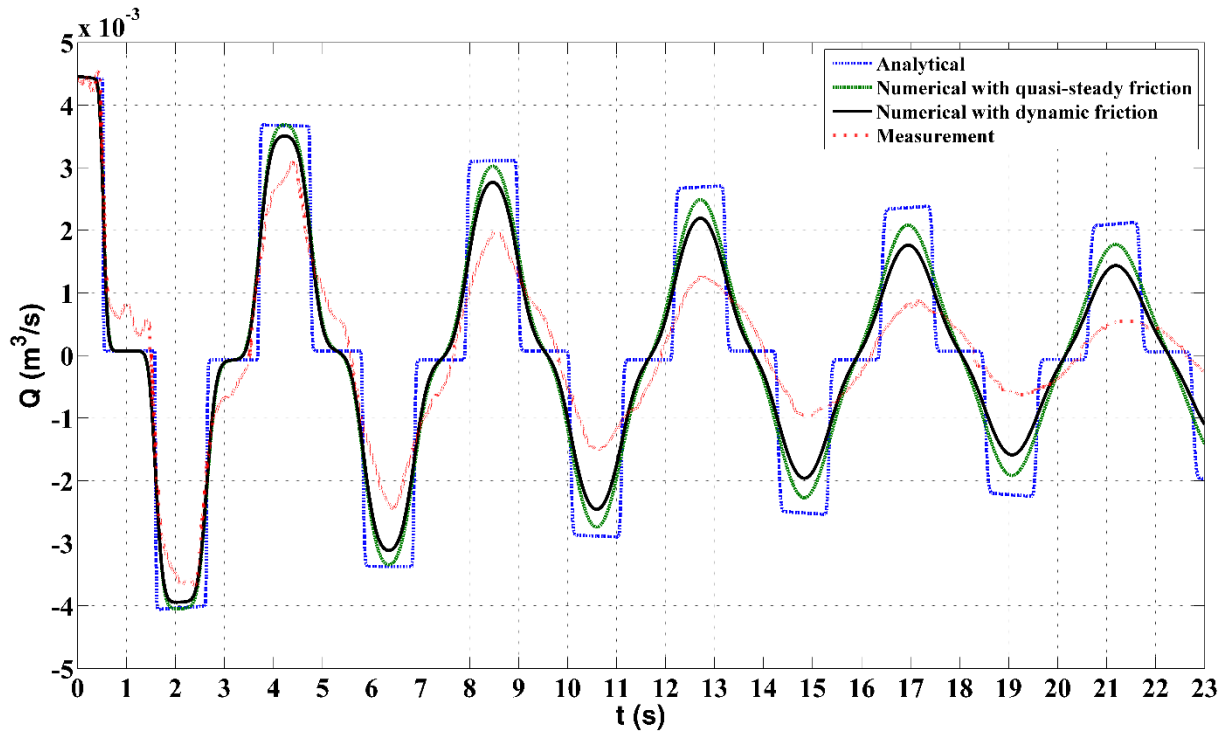
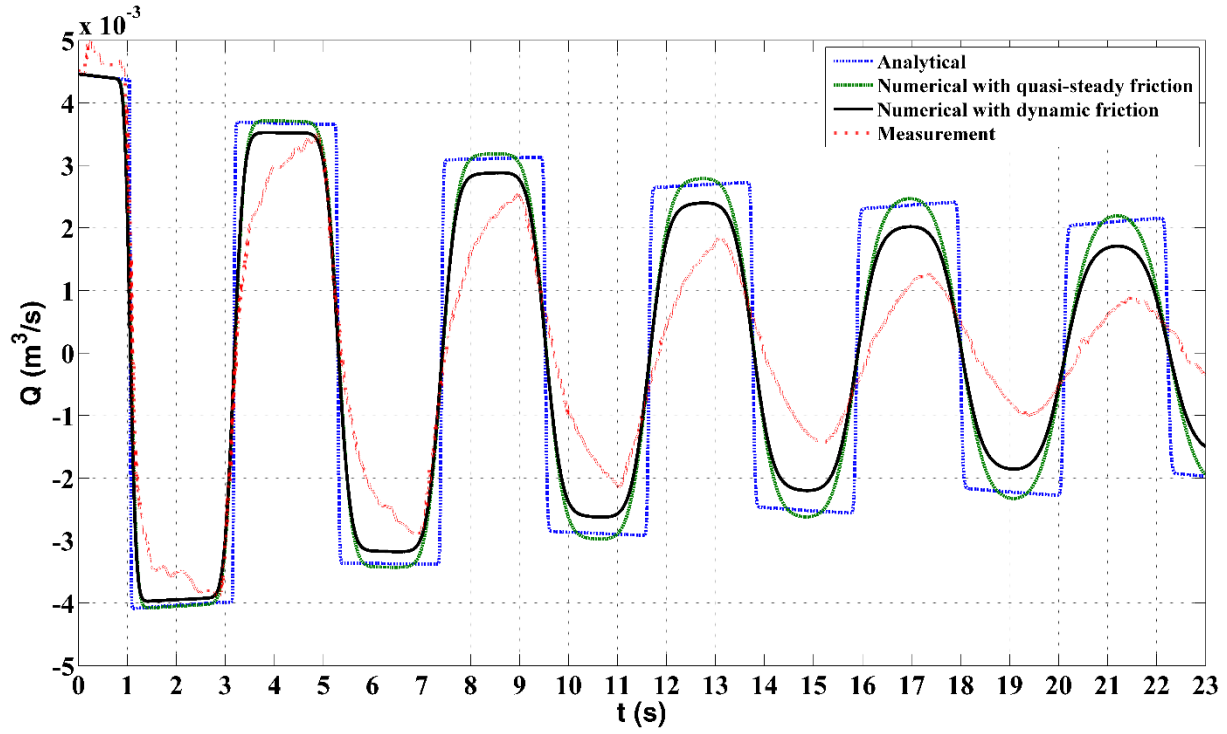


Figure 5.7: Test No 2: Comparison of discharge profiles ($\Delta t = 0.002$ s, $N = 100$) between the various formulations for the friction term: a) section #1; b) section #2

5.7 Conclusions and Recommendations

The water-hammer equations in conservation form incorporating dynamic friction is developed and numerically solved using a finite volume formulation. The computational algorithm based on the Godunov scheme for one-dimensional hyperbolic systems is presented in some detail. Introduction of the dynamic friction results in the appearance of a source term in the hyperbolic system of governing partial differential equations. Two case studies have been presented to compare and contrast the separate impacts of steady friction only and of dynamic friction on wave attenuation in time. The findings indicate that inclusion of the dynamic friction reduces the peak water-hammer pressures when compared with the standard quasi-steady assumption for the friction. The inclusion of the dynamic friction results in a better agreement between calculated and measured values. In these two case studies, the grid size and time step have been reduced; the numerical solution do not change significantly if a high-order scheme is exploited. Computational time for each of the cases studied took only three minutes on a PC (operating system: Windows 7 64 bits; CPU: Intel(R) Xeon(R) CPU E5620 @ 2.40 GHz x 2 processors; mainboard: ASUS Z8NA-D6(C); memory: 12280 Mbytes Triple channel DDR3 ECC @ 1333 MHz). Thus several variants can be studied in a short period of time. The efficient algorithm introduced in this paper could be used, with some modifications, in the high-order schemes which will yield less computational effort. However, for more precision in engineering applications, other key parameters such as cavitation, fluid–structure interaction, viscoelastic behaviour of the pipe wall, leakage and blockage have to be properly modelled and incorporated into the formulation. This paper may be used as a basis for the study of real mass variations in a surge tank. It should also prove useful as a tool for the optimal design of surge controls.

5.8 Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the partial financial support of Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

5.9 Notation

The following symbols are used in this paper:

Variables and operators	a	Celerity of the pressure waves
	\mathbf{A}	Jacobian matrix of the flux \mathbf{F} respecting to \mathbf{U}
	A_0	Cross-sectional area of pipe
	C^*	Vardy's shear decay constant
	d	(operator) Differential
	D	Diameter of the pipe
	e	Pipe wall thickness
	E	Young's modulus of elasticity for the pipe material
	E_V	Bulk modulus of elasticity
	f	Friction factor
	\mathbf{F}	Vector flux in the x -direction
	f_a	Quasi-steady part of the friction factor
	f_u	Unsteady part of the friction factor
	k_S	Absolute roughness of the pipe
	N	Number of cells in the computational domain
	p	Pressure
	Q	Volume discharge
	Q_m	Mass discharge
	\mathbf{R}	Matrix for the hyperbolic source term
	Re	Reynolds number
	\mathbf{S}	Vector source term
	t	Time
	\mathbf{U}	Vector variable
	V	Fluid velocity
	x	Unit vector in the x -direction
	Δt	Computational time step
	Δt_{Max}	Maximum permissible computational time step
	$\Delta t_{Max,S}$	Maximum permissible computational time step for the discretized source
	Δx	Cell size in the x -direction

	λ	Eigenvalue
	μ	Mass of fluid per unit length of pipe
	ρ	Mass density
Subscript	b	Value to be prescribed at a boundary
	b, L	Value to be prescribed at the left-hand boundary
	b, R	Value to be prescribed at the right-hand boundary
	i	Cell number
Superscript	n	Time level
	n, h	Numerical solution obtained at the time level n after the solution of the hyperbolic source term of the equation
	n, x	Numerical solution obtained at the time level n after the solution of the conservation part of the equation in the x -direction
	$n + 1/2$	Average value between the time level n and $n + 1$
	(p)	k -th column of matrix
	∞	Time level if t gets larger
	$*$	Intermediate region in the solution of the Riemann problem

CHAPITRE 6 ARTICLE 3 : FINITE VOLUME SOLUTIONS TO THE WATER-HAMMER EQUATIONS IN CONSERVATION FORM INCORPORATING VISCOELASTIC BEHAVIOUR OF THE PIPE- WALL USING THE GODUNOV SCHEME

(Manuscript under review for possible publication in the Journal of Fluids and Structures)

Aboudou Seck⁶ Ph.D.c.; Musandji Fuamba⁷ Ph.D.; René Kahawita⁸ Ph.D.

6.1 Abstract

Although derived from the principles of conservation of mass and momentum, the water-hammer equations incorporating the viscoelastic behaviour of the pipe-wall are almost never expressed in conservation form. The main contribution of this paper is to incorporate the viscoelastic behaviour of the pipe-wall in the derivation of the water-hammer equations in conservation form. The system is then solved using the Godunov finite volume scheme to obtain numerical solutions. It is hoped that this paper will assist personnel who are at the detailed design phase, to safely optimize any incorporated surge controls by providing guidelines in the development and numerical simulation of the water-hammer equations with viscoelastic behaviour of the pipe-wall. This results in the appearance of a new term in the mass conservation equation of the governing system as presented by Guinot. The numerical algorithm implements the Godunov approach to one-dimensional hyperbolic systems of conservation laws on a finite volume stencil. The viscoelastic response of the pipe-wall in the mass conservation part of the source term has been modelled using generalized Kelvin-Voigt theory and the Covas numerical scheme. For the momentum part of the source term Clamond's fast, robust and accurate numerical scheme related to the Lambert W for solving the

⁶ Ph.D. Student, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7 (corresponding author). E-mail: aboudou.seck@polymtl.ca

⁷ Professor, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7.

⁸ Professor, Dept. of Civil, Geological and Mining Engineering, Polytechnique Montréal, 2500 Chemin de Polytechnique, Montreal, QC, Canada H3C 3A7.

friction factor has been used. One case study has been used to illustrate the influence of the various formulations. A comparison between the analytical solution, the numerical solution with quasi-steady friction, the numerical solution with the viscoelastic model, and the measurements has been presented. The results indicate that the inclusion of viscoelastic effects results in better agreement between the computed and measured values.

Keywords: Hydraulic transients; Water-hammer; Viscoelastic pipe-wall; Finite volume; Riemann problem; Godunov scheme.

6.2 Introduction

In the detailed design of pipeline systems, water-hammer analysis is very important to select pipe characteristics and to specify surge control to prevent and/or mitigate any excessive pressures. The detailed design further attempts to elaborate the complete system response using various tools such as numerical modeling. Bousso and Fuamba (2013) have numerically represented the unsteady friction in transient two-phase flow with a hyperbolic source term. Shamloo et al. (2015) review a quasi-steady model and four unsteady friction models (Brunone et al. 1991; Trikha 1975; Vardy and Brown 2003; Zielke 1968) for transient pipe flow. The Trikha (1975) model presents a simplification of the Zielke (1968) model. Their paper bridges the gap between the design concept and the detailed design phase for surge tanks but cannot be used as a general purpose tool for transient analysis since certain key parameters such as the viscoelastic behaviour of the pipe-wall are not incorporated.

Bergant et al. (2008a) and (2008b) have experimentally investigated all key parameters (unsteady friction, cavitation, fluid–structure interaction, viscoelastic behaviour of the pipe wall, leakage and blockage) that may affect the pressure waveform predicted by the classical theory of water-hammer. In general, numerical simulation tools assume that the friction factor is considered steady, quasi-steady or dynamic; this has the tendency to overestimate the water-hammer peak pressures since the primary mechanism that may significantly affect pressure waveforms is the viscoelastic behaviour of the pipe-wall. In viscoelastic pipes, such as polyvinyl chloride (PVC) and polyethylene (PE), the mechanical damping of the pressure response is much higher than the viscous damping due to the fluid friction during the occurrence of transient events (Covas et al. 2005; Covas et al. 2004; Franke 1983; Gally et al. 1979; Güney 1983; Rieutord 1982; Rieutord and

Blanchard 1979; Suo and Wylie 1990). Guinot (2003) focused on the theoretical and practical implementation of the Godunov approach to simulate water hammer using finite volumes with steady friction that gives rise to a non-hyperbolic source term.

Although derived from the principles of conservation of mass and momentum, the water-hammer equations integrating viscoelastic behaviour of the pipe-wall are almost never expressed in conservation form. This is because the presence of the viscoelastic behaviour of the pipe-wall terms preclude presentation in the integral (conservation) form and cause a source term to appear. The finite volume method which was developed for hyperbolic equations in conservation form (eg. the Euler equations in fluid dynamics) should be adapted to tackle systems that are not in ‘proper’ conservation form. Hyperbolic systems admit weak solutions in the form of discontinuities or ‘shocks’. The treatment of these discontinuities requires special treatment of the flux function to avoid spurious oscillations. A large body of literature is available on finite volume schemes developed to handle the solution near these shocks. This paper presents the derivation of the water-hammer equations in conservation form with viscoelastic behaviour of the pipe-wall.

6.3 Methodology

This paper focuses on implementation of the Godunov approach to the one-dimensional hyperbolic system of conservation laws that describe the phenomenon of water-hammer integrating viscoelastic behaviour of the pipe-wall. The Godunov method is a conservative numerical scheme for solving Partial Differential Equations (PDE) in computational fluid dynamics. This well-known conservative finite-volume method solves an exact or approximate Riemann problem at each inter-cell boundary. It is first order accurate in both space and time. Several higher order finite volume schemes in the same vein have been published in the literature. However, in the present context, given the simple geometry and non-varying fluid properties (the fluid is slightly compressible), the basic Godunov Scheme is considered adequate by the authors.

First the computation of the fluxes is detailed followed by a description of the complete numerical algorithm. Finally, a case study is examined with comparisons being made between an analytical solution, the numerical solution with quasi-steady friction, the numerical solution with viscoelastic behaviour of the pipe-wall and experimental results.

6.4 Classical derivation from the conservation of mass and momentum

For a pipe of constant cross-section, the one-dimensional flow equations presented in vector form (Guinot (2003)) are:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} &= \mathbf{S} \\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mu \\ Q_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_m \\ A_0 p \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_q |V|V \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

Where t is time, x the unit vector in the x -direction, \mathbf{U} the flow variable vector, \mathbf{F} the flux vector in the x -direction and \mathbf{S} the source term vector. μ is the mass of fluid per unit length of pipe, Q_m the mass discharge, A_0 the cross-sectional area of pipe, p the pressure, V the fluid velocity and f_q the friction coefficient dependant on the pipe roughness and the fluid viscosity.

For turbulent flow, the friction factor f_q may be obtained from the Colebrook-White Equation:

$$\frac{1}{\sqrt{f_q}} = -2 \log_{10} \left(\frac{k_s/D}{3.7} + \frac{2.51}{Re \sqrt{f_q}} \right) \quad (6-2)$$

In which k_s is the absolute roughness of the pipe, D the diameter and Re the Reynolds number

For laminar flow, the friction factor f_q is given by:

$$f_q = \frac{64}{Re} \quad (6-3)$$

6.5 Incorporation of the viscoelastic behaviour of the pipe-wall

In plastic pipes, the total strain ε is split into the sum of the elastic strain ε_e and retarded viscoelastic strain ε_r (Bergant et al. 2008a; Bergant et al. 2008b; Covas et al. 2005; Covas et al. 2004; Weinerowska-Bords 2006):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_r \quad (6-4)$$

The elastic strain is already included in the liquid wave speed expressed as:

$$a_0 = \sqrt{\frac{E_V}{\rho}} \sqrt{\frac{1}{1 + c_1 \frac{DE_V}{eE_0}}} \quad (6-5)$$

Where E_0 is Young's modulus for the pipe material, E_V the bulk modulus of elasticity of the fluid, ρ the fluid density, e the pipe wall thickness and c_1 the dimensionless parameter that takes into account pipe cross-section dimensions and constraints; for a thick wall pipe anchored along its length, c_1 is defined as (Streeter and Wylie 1993) :

$$c_1 = \frac{2e}{D}(1 + \nu) + \frac{D}{D + e}(1 - \nu^2) \quad (6-6)$$

In which, ν is the Poisson's ratio.

The retarded viscoelastic strain ε_r influences only the continuity equation, in which an additional term describing this effect appears (Bergant et al. 2008a; Bergant et al. 2008b; Covas et al. 2005; Covas et al. 2004; Weinerowska-Bords 2006) as:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a_0^2}{gA_0} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2a_0^2}{g} \frac{d\varepsilon_r}{dt} = 0 \quad (6-7)$$

Where H is water head, Q the volume discharge and g the gravitational acceleration.

Finally, the complete system may be rewritten as Equation (6-8) in terms of the 'conserved' dependent variables μ and Q_m :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mu}{\partial t} + \frac{\partial Q_m}{\partial x} &= -2\mu \frac{d\varepsilon_r}{dt} \\ \frac{\partial Q_m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(A_0 p) &= -f_q |V|V \end{aligned} \right\} \quad (6-8)$$

Or, in vector form as:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} &= \mathbf{S} \\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mu \\ Q_m \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} Q_m \\ A_0 p \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -2\mu \frac{d\varepsilon_r}{dt} \\ -f_q |V|V \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6-9)$$

Equation (6-9) is equivalent to the Guinot basic Equation (6-1) if viscoelastic behaviour of the pipe-wall is neglected. The inclusion of the viscoelastic behaviour of the pipe-wall results in the appearance of the term $-2\mu \frac{d\varepsilon_r}{dt}$ in the mass conservation part of the source term \mathbf{S} . To close the vector equation (6-9), the wave speed a_0 is introduced as:

$$a_0 = \left[\frac{d}{d\mu} (A_0 p) \right]^{1/2} \quad (6-10)$$

Where it is assumed that the wave speed depends on fluid compressibility, pipe physical properties and external constraints.

Equation (6-8) may then be rewritten:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} &= \mathbf{S} \\ \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} \mu \\ Q_m \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \mathbf{S} = \begin{bmatrix} -2\mu \frac{d\varepsilon_r}{dt} \\ -f_q |V|V \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (6-11)$$

Where $\mathbf{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$ is the (constant) Jacobian matrix of the flux \mathbf{F} with respect to the vector of variables \mathbf{U} . Since the homogeneous part of the system is linear, the two (constant) eigenvalues $\lambda^{(1)}$ and $\lambda^{(2)}$ of the matrix \mathbf{A} are:

$$\left. \begin{aligned} \lambda^{(1)} &= -a_0 \\ \lambda^{(2)} &= +a_0 \end{aligned} \right\} \quad (6-12)$$

The next section describes the solution process for the system.

6.6 Numerical solution

Equation (6-9) is solved in two steps: the first step uses the Guinot (2003) solution for the mass conservation part of the PDE (6-9) omitting the source term S :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0 \quad (6-13)$$

The second step uses the Toro (2001), Guinot (2003) and Bousso and Fuamba (2013) treatment of the source term in (6-9).

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S} \quad (6-14)$$

The viscoelastic model (based on the generalized Kelvin-Voigt model) in the mass conservation part of the source term is solved using the Covas et al. (2005) numerical scheme. For the momentum part of the source term, the Colebrook-White equation is solved using a robust, fast and accurate numerical scheme due to Clamond (2009).

6.6.1 Guinot's solutions at the internal cells and at the boundaries for Eq. (6-13)

The conservation component omitting the source term S of Equation (6-9) is Equation (6-13). It is the same conservation component as in Guinot's (2003) Equation (6-1). For the internal cells, Guinot (2003) constructs the Riemann problem $\mathbf{U}(x, t^n)$ and presents the solution $\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}$ of this Riemann problem in Equation (6-15) computing the flux $\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2}$ between the time intervals t^n and t^{n+1} according to Equation (6-16).

$$\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} \mu_{i+1/2}^{n+1/2} \\ Q_{m,i+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_i^n + \mu_{i+1}^n + (Q_{m,i}^n - Q_{m,i+1}^n)/a_0 \\ (\mu_i^n + \mu_{i+1}^n)a_0 + Q_{m,i}^n - Q_{m,i+1}^n \end{bmatrix} \quad (6-15)$$

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} = \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1/2}^{n+1/2}) = \begin{bmatrix} Q_{m,i+1/2}^{n+1/2} \\ A_0 p_{i+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} \quad (6-16)$$

Where $p_{i+1/2}^{n+1/2} = p_{ref} + a_0^2 (\mu_{i+1/2}^{n+1/2} - \mu_{ref})$ according to Eq. (6-10); p_{ref} is a reference pressure at which the density ρ_{ref} is known. μ_{ref} is calculated as $\mu_{ref} = A_0 \rho_{ref}$.

The flux solutions for a prescribed pressure p_b at the left-hand ($p_{b,L}$) and the right-hand ($p_{b,R}$) boundary are respectively given by:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_{m,1}^n + (\mu_{1/2}^{n+1/2} - \mu_1^n) a_0 \\ A_0 p_{b,L} \end{bmatrix} \quad (6-17)$$

$$\mathbf{F}_{N+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_{m,N}^n + (\mu_N^n - \mu_{N+1/2}^{n+1/2}) a_0 \\ A_0 p_{b,R} \end{bmatrix} \quad (6-18)$$

In Equations (6-17) and (6-18), p_b represents a pressure to be prescribed at the boundary. The mass of fluid per unit length of pipe $\mu_{1/2}^{n+1/2}$ (at the left-hand) and $\mu_{N+1/2}^{n+1/2}$ (at the right-hand) is obtained from the prescribed pressure p_b using:

$$\mu_b = \mu_{ref} + \frac{A_0}{a_0^2} (p_b - p_{ref}) \quad (6-19)$$

The fluxes for a prescribed discharge Q_b at the left-hand and the right hand boundary are respectively given by:

$$\mathbf{F}_{1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_b \mu_{1/2}^{n+1/2} / A_0 \\ A_0 p_{1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} \quad (6-20)$$

$$\mathbf{F}_{N+1/2}^{n+1/2} = \begin{bmatrix} Q_b \mu_{N+1/2}^{n+1/2} / A_0 \\ A_0 p_{N+1/2}^{n+1/2} \end{bmatrix} \quad (6-21)$$

Where $\mu_{1/2}^{n+1/2}$ in Equation (6-20) and $\mu_{N+1/2}^{n+1/2}$ in Equation (6-21) are obtained respectively from:

$$\mu_{1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_{m,1}^n - a_0 \mu_1^n}{\frac{Q_b}{A_0} - a_0} \quad (6-22)$$

$$\mu_{N+1/2}^{n+1/2} = \frac{Q_{m,N}^n + a_0 \mu_N^n}{\frac{Q_b}{A_0} + a_0} \quad (6-23)$$

According to Eq. (6-10), $p_{1/2}^{n+1/2}$ in Equation (5-20) and $p_{N+1/2}^{n+1/2}$ in Equation (6-21) are obtained respectively from:

$$p_{1/2}^{n+1/2} = A_0 p_{ref} + \left(\mu_{1/2}^{n+1/2} - \mu_{ref} \right) a_0^2 \quad (6-24)$$

$$p_{N+1/2}^{n+1/2} = A_0 p_{ref} + \left(\mu_{N+1/2}^{n+1/2} - \mu_{ref} \right) a_0^2 \quad (6-25)$$

For all cells, the balance is performed omitting the source term using:

$$\mathbf{U}_i^{n+1,x} = \mathbf{U}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x_i} \left(\mathbf{F}_{i-1/2}^{n+1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}^{n+1/2} \right) \quad (6-26)$$

6.6.2 Discretization of the source term

As stated earlier, the source term is discretized using a numerical viscoelastic model for the mass conservation part and Clamond's (2009) scheme for the momentum part. Taking the provisional solution $\mathbf{U}_i^{n+1,x}$ obtained at the end of the Godunov step as a starting point, the final solution \mathbf{U}_i^{n+1} of the source term at the end of the time step is presented by Toro (2001), Guinot (2003), Bousso and Fuamba (2013) in the following form:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^{n+1,x} + \mathbf{S}(\mathbf{U}_i^{n+1,x}) \Delta t \quad (6-27)$$

Where $\mathbf{S}(\mathbf{U}_i^{n+1,x})$ is calculated by using $\mathbf{U}_i^{n+1,x}$.

In the present example, the vector Eq. (6-14) is equivalent to the system of ODE's:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= -2\mu \frac{d\varepsilon_r}{dt} \\ \frac{dQ_m}{dt} &= -f_q Q_m |Q_m| \end{aligned} \right\} \quad (6-28)$$

The independent ODEs Eq. (6-28) have the following discretized form:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i^{n+1} &= \mu_i^{n+1,x} \exp(-2\varepsilon_{r,i}^{n+1}) \\ Q_{m,i}^{n+1} &= \frac{Q_{m,i}^{n+1,x}}{1 + |Q_{m,i}^{n+1,x}| \Delta t f_q} \end{aligned} \right\} \quad (6-29)$$

The creep-compliance function $J(t)$ at time t must be known to calculate the time derivative of the retarded strain $\varepsilon_{r,i}^{n+1}$. The generalized Kelvin-Voigt model for a viscoelastic solid i.e. Eq. (6-30) represented in Fig 6.1 is generally used to describe the creep-compliance function $J(t)$ (Aklonis et al. 1972; Covas et al. 2005; Gally et al. 1979; Suo and Wylie 1990):

$$J(t) = J_0 + \sum_{k=1}^N J_k (1 - e^{-t/\tau_k}) \quad (6-30)$$

Where $J_0 = 1/E_0$ is the creep-compliance of the initial spring, $J_k = 1/E_k$ the creep-compliance of the spring of Kelvin-Voigt k -element, E_k the modulus of elasticity of the spring of k -element, $\tau_k = \eta_k/E_k$ the retardation time of the dashpot of k -element, η_k the viscosity of the dashpot of k -element.

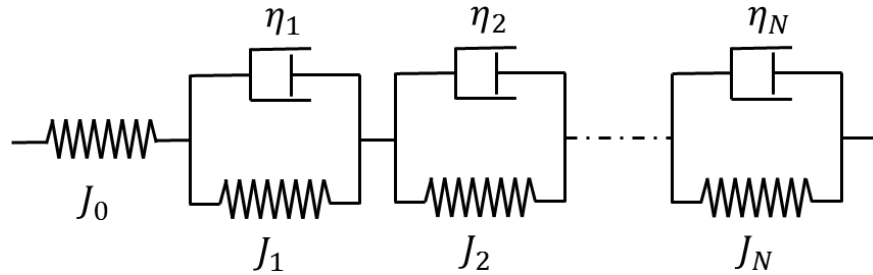


Figure 6.1: Generalized Kelvin-Voigt model of viscoelastic behaviour of structure

The values of parameters J_k and τ_k of the viscoelastic mechanical model were calibrated to the creep-compliance test data.

The retarded viscoelastic strain $\varepsilon_{r,i}^{n+1}$ is calculated as the sum of these parameters of each Kelvin-Voigt element k as:

$$\varepsilon_{r,i}^{n+1} = \sum_{k=1}^N \varepsilon_{rk,i}^{n+1} \quad (6-31)$$

Based on the strain time-derivative calculated by the analytical differentiation equation of the integral form, and after mathematical manipulations for each Kelvin-Voigt element k , Covas et al. (2005) proposed Eq.(6-32 to 6-34) which are numerical approximations:

$$\frac{\partial \varepsilon_{rk}(x, t)}{\partial t} = \frac{J_k}{\tau_k} F(x, t) - \frac{\tilde{\varepsilon}_{rk}(x, t)}{\tau_k} \quad (6-32)$$

Where the functions $F(x, t)$ and $\tilde{\varepsilon}_{rk}(x, t)$ are defined respectively by:

$$F(x, t) = \frac{c_1 D}{2e} \rho g [H(x, t) - H_0(x)] \quad (6-33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{rk}(x, t) = & J_k F(x, t) - J_k e^{-\Delta t / \tau_k} F(x, t - \Delta t) \\ & - J_k \tau_k (1 - e^{-\Delta t / \tau_k}) \frac{F(x, t) - F(x, t - \Delta t)}{\Delta t} + e^{-\Delta t / \tau_k} \tilde{\varepsilon}_{rk}(x, t - \Delta t) \end{aligned} \quad (6-34)$$

If the pipe material is homogeneous and isotropic, the viscoelastic behaviour for small strains is linear, and Poisson's ratio is constant, function $F(x, t)$ is equivalent to the stress σ for the pipe subjected to the internal pressure expressed as (Streeter and Wylie 1993):

$$\sigma = \frac{c_1 D}{2e} dp \quad (6-35)$$

Substituting Eq. (6-10) into Eq. (6-33), the function $F(x, t)$ can be then rewritten in conservative form as:

$$F(x, t) = \frac{c_1 D a_0^2}{2e A_0} [\mu(x, t) - \mu_{\text{Ref}}] \quad (6-36)$$

The final discretization of the source term is:

$$\left. \begin{aligned} \mu_i^{n+1} = & \mu_i^{n+1,x} \exp \left[-2\Delta t \sum_{k=1}^N \left(\frac{J_k}{\tau_k} F(x, t) - \frac{\tilde{\varepsilon}_{rk}(x, t)}{\tau_k} \right) \right] \\ Q_{m,i}^{n+1} = & \frac{Q_{m,i}^{n+1,x}}{1 + |Q_{m,i}^{n+1,x}| \Delta t f_q} \end{aligned} \right\} \quad (6-37)$$

This discretization Eq. (6-37) is equivalent to the classical Guinot source term solution (6-1) if viscoelastic behaviour of the pipe-wall is not considered. In the case of a rigid pipe-wall, the exponential term tends to 1 in the solution of the mass conservation part of the source term \mathbf{S} .

The momentum part of the source term contains the implicit expression Eq. (6-2) for the friction factor in turbulent flow. Clamond (2009) has introduced a fast, accurate and robust numerical algorithm for solving the Colebrook-White equation that is more efficient than the solution expressed in term of the Lambert W-function also sometimes called the Omega (Corless et al. 1996; Corless et al. 1997) or simple approximations such as the Haaland (1983) formula.

$$\frac{1}{\sqrt{f_q}} = \frac{2}{\ell} \varpi \left(\frac{\ell K R_e}{18.574} \middle| \ln \left(\frac{\ell R_e}{5.02} \right) \right) \quad (6-38)$$

Where $K = k_s/D$ is equivalent absolute roughness divided by the pipe diameter, $\ell = \ln 10 \approx 2.302585093$, the ϖ -function is related to the Lambert W function as:

$$\left. \begin{aligned} \varpi(x_1|x_2) &= W(\exp(x_1 + x_2)) - x_1 \\ W(x) &\sim \ln(x) - \ln(\ln(x)) \text{ as } x \rightarrow \infty \end{aligned} \right\} \quad (6-39)$$

More details can be found in Clamond (2009).

6.6.3 Computational time step

Since the scheme is explicit, the Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) condition for stability must be respected, i.e., the maximum permissible time step Δt_{Max} (Guinot 2003) is as follows:

$$\Delta t_{Max} = \text{Min} \left[\text{Min}_{i=1,\dots,N} \left(\frac{\Delta x_i}{a} \right), \Delta t_{Max,S} \right] \quad (6-40)$$

Where the maximum permissible time step $\Delta t_{Max,S}$ for the source term is as follows:

$$\Delta t_{Max,S} = \text{Min}_{i=1,\dots,N} \left[-2 \frac{u_i^{n+1,x}}{s(u_i^{n+1,x})} \right]$$

6.7 Resolution algorithm

The proposed algorithm is presented in the following (Fig. 6.2):

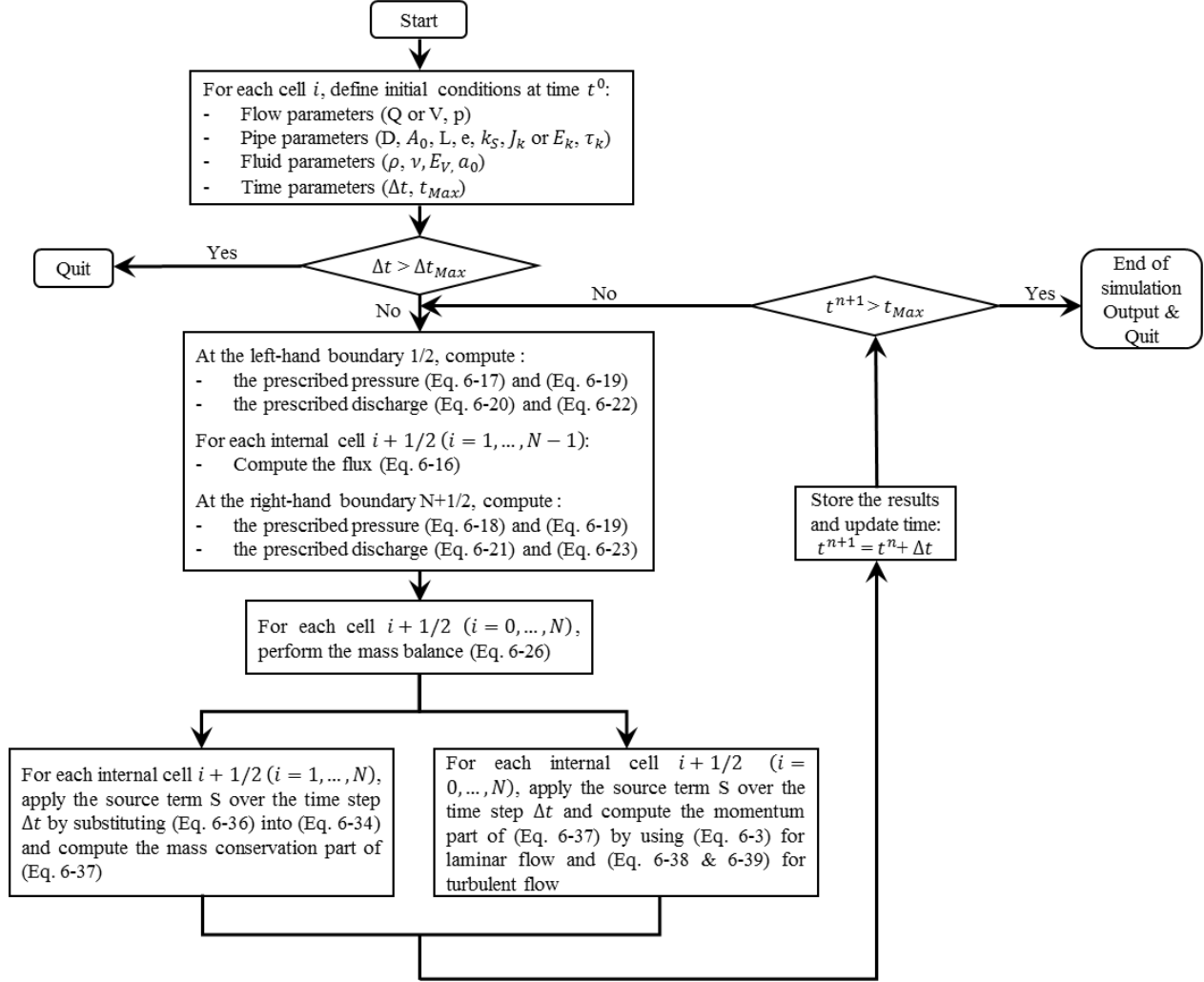


Figure 6.2: Schematic of the proposed algorithm

6.8 Application

6.8.1 Experimental setup

The results of experimental studies conducted by Covas et al. (2004) collected from a PE pipe-rig at Imperial College (London, UK) and considered to be of good quality are compared with the mathematical model. The experimental setup is composed of a 277m long PE pipe with an inner diameter of 50.6 mm and a thickness of 6.25 mm that connects to an upstream air vessel. Initial steady flow conditions ($Q_0 = 1.008$ l/s) are followed by a transient event initiated by the rapid closure of a globe valve at the downstream end. The initial wave speed a_0 was estimated at 395 m/s. The pressure waves were computed and compared with the corresponding experimental values

at location #1 (distance $x=273$ m from upstream), location #5 (distance $x=117.5$ m from upstream) and location #8 (distance $x=199$ m from upstream).

The values of the creep coefficients J_k for the retardation times τ_k (s) are indicated below:

$$J_0 = 0.7 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}$$

$$J_1 = 0.1394 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}; \tau_1 = 0.05 \text{ s};$$

$$J_2 = 0.0062 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}; \tau_2 = 0.5 \text{ s};$$

$$J_3 = 0.1148 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}; \tau_3 = 1.5 \text{ s};$$

$$J_4 = 0.3425 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}; \tau_4 = 5 \text{ s};$$

$$J_5 = 0.0928 \cdot 10^{-9} \text{ Pa}^{-1}; \tau_5 = 10 \text{ s};$$

A complete description of the experimental setup and the collected data may be found in Covas et al. (2004).

6.8.2 Results and Discussion

The water-hammer equations incorporating viscoelastic behaviour of the pipe-wall were solved using the Godunov scheme detailed above. In keeping with the objectives of this paper, results were obtained for the analytical resolution, the numerical solution with quasi-steady friction and the numerical solution with the viscoelastic model using a time step of $\Delta t = 0.0008$ s. These results are compared with the experimental measurements. Good agreement between measured and computed viscoelastic profiles has been obtained (Figures 6.3, 6.4 and 6.5). Comparison between the results indicates that the inclusion of viscoelasticity has a significant influence on the pressure profiles. The analytical model and the quasi-steady friction model do not reproduce very well the evolution of the typical shape of the pressure oscillations. They also display phase shift errors. The quasi-steady friction model underestimates the damping and dispersion predicted by the (physically) more accurate viscoelastic model which tends to attenuate the magnitude of the overpressures more rapidly. Due to damping, the waves will be of decreasing amplitude until the final equilibrium pressure is reached.

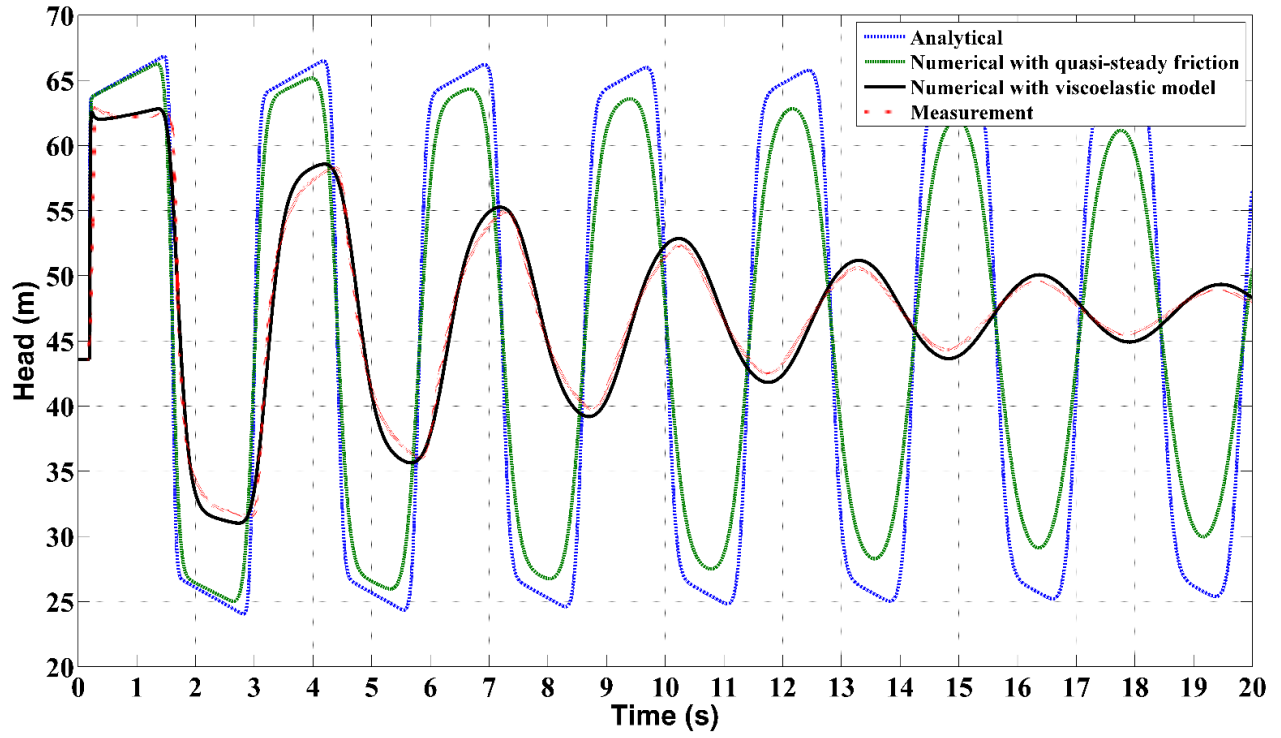


Figure 6.3: Pressure profiles ($\Delta t = 0.0008$ s, $N = 100$ cells) at location #1

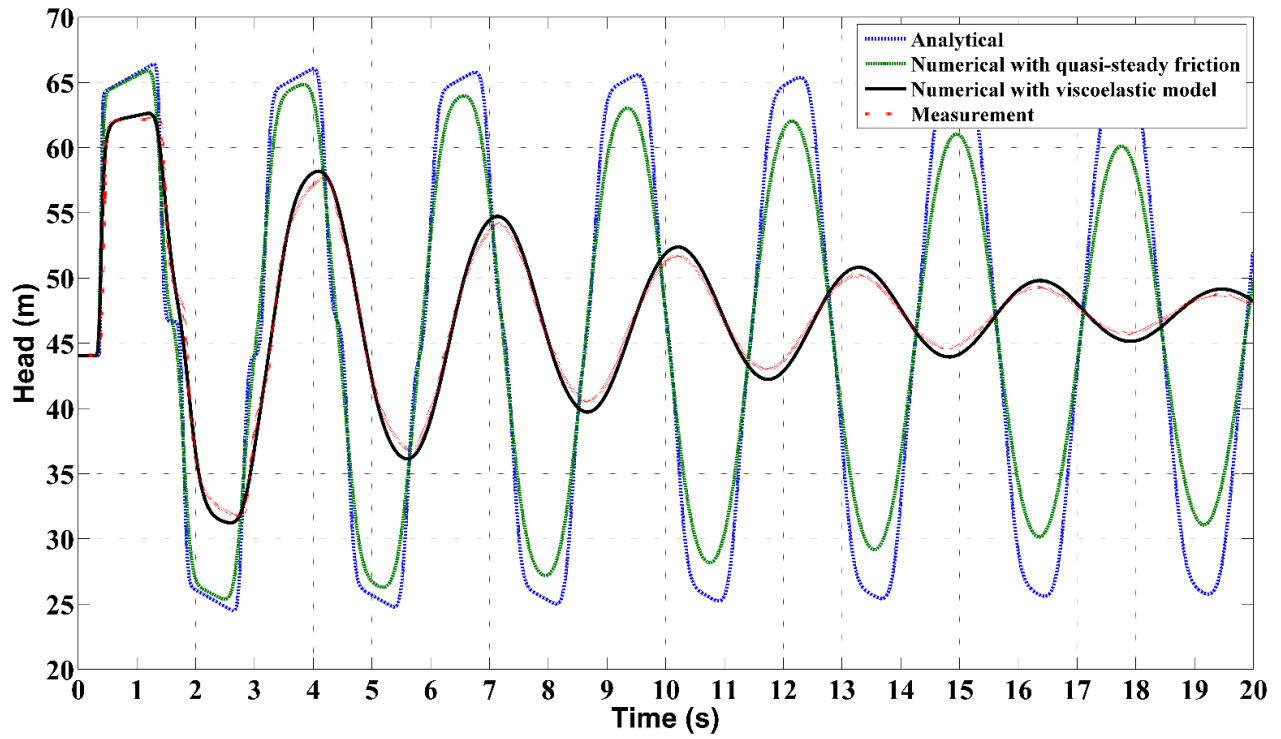


Figure 6.4: Pressure profiles ($\Delta t = 0.0008$ s, $N = 100$ cells) at location #8

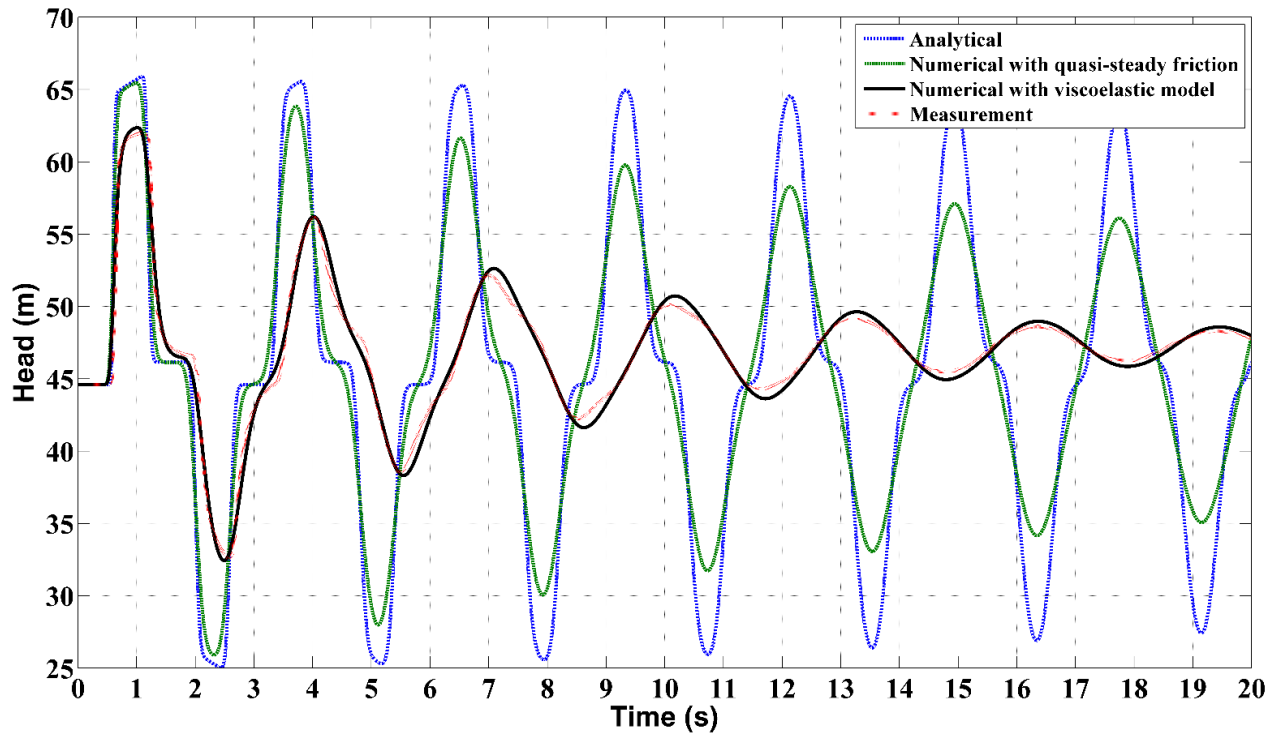


Figure 6.5: Pressure profiles ($\Delta t = 0.0008$ s, $N = 100$ cells) at location #5

6.9 Conclusions and Recommendations

The water-hammer equations in conservation form incorporating viscoelastic behaviour of the pipe-wall is developed and numerically solved using a finite volume formulation for engineering applications. A robust, simple, accurate and fast computational algorithm based on the Godunov scheme for one-dimensional hyperbolic systems is presented in some detail. Introduction of the viscoelastic behaviour of the pipe-wall results in the appearance of a new term in the mass conservation part of the source term in the hyperbolic system of governing partial differential equations. One case study has been presented to compare the separate impacts on wave attenuation with time. The findings indicate as expected, inclusion of viscoelasticity reduces the peak water-hammer pressures. The model developed appears to be capable of satisfactorily predicting transient pressures in a viscoelastic pipe. For engineering applications of water-hammer, it does not appear necessary to exploit modern numerical schemes of high-order accuracy (Total Variation Diminishing (TVD) (Zijlema and Wesseling 1998), Essentially Non-Oscillatory (ENO) (Harten et al. 1987) and Weighted Essentially Non-Oscillatory (WENO) schemes ((Liu et al. 1994), (Jiang and Shu 1995))). The efficient algorithm introduced in this paper could be used, with some

modifications, in these high-order schemes which the authors feel will provide only incremental accuracy. Computational time for the case studied took only one minute and 28 secs on a PC (operating system: Windows 7 64 bits; CPU: Intel(R) Xeon(R) CPU E5620 @ 2.40 GHz x 2 processors; mainboard: ASUS Z8NA-D6(C); memory: 12280 Mbytes Triple channel DDR3 ECC @ 1333 MHz). Thus, several variants may be studied in a short period.

6.10 Acknowledgments

The authors gratefully acknowledge the partial financial support of Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

6.11 Notation

The following symbols are used in this paper:

Variables and operators	a_0	Celerity of the pressure waves
	\mathbf{A}	Jacobian matrix of the flux \mathbf{F} respecting to \mathbf{U}
	A_0	Cross-sectional area of pipe
	c_1	Dimensionless parameter
	d	(operator) Differential
	D	Diameter of the pipe
	e	Pipe wall thickness
	E	Young's modulus of elasticity for the pipe material
	E_k	Modulus of elasticity of the spring of k -element
	E_V	Bulk modulus of elasticity
	\mathbf{F}	Vector flux in the x -direction
	f_a	Quasi-steady part of the friction factor
	g	Gravitational acceleration
	H	Water head
	J_k	Creep-compliance of the spring of Kelvin-Voigt k -element
	k_S	Absolute roughness of the pipe
	N	Number of cells in the computational domain
	p	Pressure
	Q	Volume discharge
	Q_m	Mass discharge
	Re	Reynolds number
	\mathbf{S}	Vector source term
	t	Time
	\mathbf{U}	Vector variable
	V	Fluid velocity
	x	Unit vector in the x -direction
	Δt	Computational time step
	Δt_{Max}	Maximum permissible computational time step
	$\Delta t_{Max,S}$	Maximum permissible computational time step for the discretized source

	Δx	Cell size in the x -direction
	σ	Stress
	ε	Total strain
	ε_e	Elastic strain
	ε_r	Retarded viscoelastic strain
	λ	Eigenvalue
	μ	Mass of fluid per unit length of pipe
	ρ	Mass density
	η_k	Viscosity of the dashpot of k -element.
	τ_k	Retardation time of the dashpot of k -element
	ν	Poisson's ratio
Subscript	b	Value to be prescribed at a boundary
	b, L	Value to be prescribed at the left-hand boundary
	b, R	Value to be prescribed at the right-hand boundary
	i	Cell number
Superscript	n	Time level
	n, x	Numerical solution obtained at the time level n after the solution of the conservation part of the equation in the x -direction
	$n + 1/2$	Average value between the time level n and $n + 1$
	(p)	k -th column of matrix
	∞	Time level if t gets larger
	$*$	Intermediate region in the solution of the Riemann problem

CHAPITRE 7 DISCUSSION GÉNÉRALE

Les résultats globaux obtenus lors de ce projet de recherche permettent d'apporter les arguments scientifiques ci-dessous. Notons cependant que chacun des articles (chapitre 4, 5 et 6) comporte en son sein une discussion plus exhaustive, en lien avec la contribution apportée :

- La revue critique de la littérature a montré que plusieurs contributions ont été apportées dans le domaine du coup de bélier. Elle a permis de montrer que des méthodes itératives sont utilisées pour la conception préliminaire des ouvrages d'amortissement des coups de bélier. Elle a aussi permis de montrer à travers des investigations expérimentales, que la prise en compte, entre autres, de la friction non-permanente et de la viscoélasticité des parois de la conduite permettent de mieux modéliser l'onde de choc en termes d'intensité et de célérité. Cependant, l'exploration de la formulation des équations de coup de bélier sous la forme des variables conservatives n'était pas privilégiée. Tous les modèles classiques, proposés à ce jour, intégrant la friction non-permanente et la viscoélasticité de la conduite, étaient donc limités à l'utilisation des domaines de calcul uniformément discrétisés.
- Des abaques simples et rapides d'utilisation peuvent aider au pré-dimensionnement des réservoirs d'équilibre face aux coups de bélier avec une précision de plus de 99.2% comparativement à la résolution mathématique classique par itération; ce qui donne la possibilité aux ingénieurs d'étudier plusieurs variantes dans un très court délai sans perdre en précision. En effet, les abaques sont les solutions de la dérivation de l'équation différentielle non homogène de premier ordre à coefficients variables sous une approche analytique. Cette approche a été bâtie sous l'hypothèse de la colonne rigide. L'équation a été développée dans l'article 1 pour prendre en compte une forme non régulière du réservoir. La non-constance des variables de cette équation est principalement attribuable à la forme irrégulière de la section du réservoir conique. Par la forme des abaques, on déduit que plus la pente de la paroi du réservoir est prononcée, moins le niveau maximum atteint par le fluide sera élevé. Les ingénieurs pourront explorer plusieurs possibilités en termes de forme, dépendamment de l'encombrement ou de l'espace disponible;
- Les équations régissant le phénomène de coups de bélier peuvent être adaptées pour les configurations complexes d'un réseau présentant des zones à fort gradient. Cela a été

possible par la transcription des équations sous la forme conservative en définissant des variables conservées;

- La prise en compte de la composante non-permanente de la friction dynamique **i)** fait apparaître un terme source hyperbolique dans la formulation conservative des équations du coup de bélier et **ii)** réduit les pics de pression en offrant une meilleure concordance pour les conduites rigides. En effet, la grande rigidité des conduites très peu déformables induit des variations temporelles de l'onde de choc qui ne pouvaient être principalement attribuées qu'aux seules variations de la pression. La prise en compte de la déformation du profil de vitesse unidimensionnel, par rapport à sa forme d'état stationnaire supposée, a aussi participé à l'atténuation du coup de bélier en raison de grandes accélérations imposées aux particules de fluide à travers la section transversale;
- La prise en compte de la viscoélasticité des parois de la conduite **i)** fait apparaître un nouveau paramètre dans le terme source de l'équation de conservation de masse du système hyperbolique des lois de conservation régissant les coups de bélier, **ii)** retarde la propagation de l'onde de choc, **iii)** réduit des pics de pression, et **iv)** offre une concordance parfaite avec des valeurs expérimentales. En effet, la réponse des parois viscoélastiques des conduites a provoqué un retard dans la propagation de l'onde de choc. La célérité de l'onde de surpression ne pouvait donc pas être constante car la dépendance entre la pression et la masse linéique du fluide dans la conduite était non-linéaire;
- Les robustes algorithmes développés et proposés, dans cette thèse, pour la modélisation numérique en volume fini des équations à variables conservatives des coups de bélier sont précis, rapides et offre la possibilité aux ingénieurs d'étudier plusieurs variantes dans un laps de temps en phase d'étude détaillée. Le schéma de Godunov, utilisé dans la résolution des équations développées, est un schéma volume fini d'ordre 1 pour la résolution des équations différentielles partielles. Plusieurs schémas de volume fini d'ordre supérieur dans la même veine ont été publiés dans la littérature. Cependant, le schéma de Godunov que nous utilisons introduit une diffusion non négligeable. C'est d'ailleurs ce qui explique l'utilisation d'un grand nombre de cellules de calcul pour obtenir une solution de qualité semblable à celle d'un schéma d'ordre supérieur qui requiert peu de cellules de calcul. Plus de cellules et donc plus d'effort de calcul est demandé à un schéma d'ordre 1. Dans les

études de cas, un grand nombre de cellules a été utilisé pour un temps de calcul n'excédant pas 3 minutes; ce qui veut dire que l'utilisation d'un schéma d'ordre supérieur en prendra bien moins de cellules et s'exécutera en bien moins de temps pour le même résultat. Pour un schéma d'ordre 1 robuste et rapide qui s'exécute en peu de temps avec beaucoup de cellules, l'utilisation d'un schéma d'ordre supérieur n'est pas justifiée, car cela n'améliorera la solution que très faiblement. En plus, dans le contexte des présents travaux avec une conduite à géométrie simple et des propriétés du fluide faiblement variables (le fluide n'étant que légèrement compressible), le schéma Godunov de base est considéré comme adéquat.

CHAPITRE 8 CONCLUSION ET RECOMMANDATIONS

8.1 Conclusions générales

Les coups de bélier induisent des ondes de surpression qui peuvent causer des dommages structurels dans les réseaux de conduites d'aqueduc, les installations hydroélectriques et les systèmes de pompage. S'ils ne sont pas modélisés en termes d'intensité et de célérité, cela peut engendrer un surdimensionnement des moyens structurels devant absorber ces ondes de chocs d'où des coûts énormes. Aussi, l'évaluation juste de la surpression peut aussi aider à planifier et à mieux cibler les plans d'entretien au niveau des réseaux et les installations qui les composent. Cette thèse présente trois approches essentielles dans un projet impliquant des coups de bélier, dépendamment de la phase de projet dictée par l'état d'avancement des plans et devis. Ainsi, en phase d'avant-projet sommaire, l'ingénieur ou le praticien utilisera les abaques de la contribution 1 (Chapitre 4 - Article 1) essentiellement basée sur une approche analytique. En phase d'avant-projet détaillé, l'ingénieur pourra utiliser l'algorithme de la contribution 2 (Chapitre 5 - Article 2) pour les conduites rigides et l'algorithme de la contribution 3 (Chapitre 6 - Article 3) pour les conduites en polymères (PVC, polyéthylène, ...).

L'approche analytique basée sur un fluide totalement incompressible (colonne rigide) a été utilisée. Des abaques de résolution ont été proposés pour aider, à l'étape préliminaire, à la conception simple et conviviale d'un réservoir d'équilibre installé sur une conduite ayant subi un coup de bélier. (Chapitre 4 - Article 1).

Un algorithme a été développé à travers un modèle numérique robuste en volume fini avec des variables conservées. Il prend en compte la composante non-permanente de la friction dynamique pendant la période d'existence du coup de bélier dans la conduite. (Chapitre 5 - Article 2).

Un algorithme robuste, rapide et précis intégrant la viscoélasticité des parois de la conduite qui subit les conséquences du coup de bélier a été développé à travers un modèle en volume fini défini avec des variables conservées. (Chapitre 6 - Article 3).

Concernant les méthodes de résolution adoptées, les abaques et les algorithmes ont été développés sur la base d'équations fondamentales régissant le phénomène des coups de bélier. Les méthodes de résolution utilisées sont robustes et précises, et se sont relevées efficaces pour traiter un problème de coup de bélier dans une conduite.

8.2 Contributions scientifiques avec comité de lecture

- Seck, A. and Fuamba, M. (2015) *Contribution to the Analytical Equation Resolution Using Charts for Analysis and Design of Cylindrical and Conical Open Surge Tanks*. *Journal of Water Resource and Protection*, 7, 1242-1256. doi: 10.4236/jwarp.2015.715101.
- Seck, A.; Fuamba, M. and Kahawita, R. (2017) *Finite Volume Solutions to the Water-hammer Equations in Conservation Form incorporating Dynamic Friction using the Godunov Scheme*. *Journal of Hydraulic Engineering*, doi:10.1061/(ASCE)HY.1943-7900.0001333.

Cet article, actuellement en production auprès de l'éditeur, a été accepté en février 2017 au *Journal of Hydraulic Engineering* du groupe éditorial ASCE (*American Society of Civil Engineers*).

- Seck, A., Fuamba, M. and Kahawita R. (2017) *Finite Volume Solutions to the Water-hammer Equations in Conservation Form incorporating Viscoelastic behaviour of the pipe-wall using the Godunov Scheme*. *Journal of Fluids and Structures*, Submitted.

Cet article a été soumis à la mi-janvier 2017 au journal spécialisé *Journal of fluids and structures* du groupe éditorial ELSEVIER. Ce journal traite spécifiquement des contributions originales sur les interactions fluide-structure dans les systèmes dynamiques.

L'article y est présentement en révision par les pairs.

8.3 Recommandations

8.3.1 Les pistes de développement futurs

Avec la disponibilité des ordinateurs de plus en plus puissants, le calcul des systèmes hyperboliques de lois de conservation exprimés avec des variables conservées est voué à un bel avenir. Ainsi tout un réseau complexe de conduites pourra être modélisé. On pourra ainsi détecter les vulnérabilités de ce réseau soumis à plusieurs coups de béliet après la fermeture synchronisée ou non de plusieurs vannes placées à différents endroits et étudier les interactions entre plusieurs ondes de choc dans le réseau, et leurs impacts. Le contrôle des zones de surpression, la planification de l'entretien des équipements, le choix des matériaux des conduites et l'optimisation de l'emplacement des

équipements d'atténuation des coups de bélier se feront alors avec beaucoup plus de précision. On tendra alors vers un outil de prise de décision voire même un outil de gestion à temps réel.

Pour cela, il faudra faire des investigations afin de déterminer la possibilité de coupler les algorithmes développés avec des logiciels d'analyse et de conception des réseaux de distribution d'eau tels que AquaGeo, Epanet, etc., afin d'étudier l'impact des coups de bélier induits par la fermeture et l'ouverture des vannes sur le réseau. On pourra aussi comparer les résultats de simulation entre les logiciels actuels (Hammer, Hytran, etc.) et les algorithmes proposés dans cette présente thèse.

D'ici-là, le développement d'une interface graphique des algorithmes développés pourra faciliter grandement leur utilisation à court terme par des concepteurs au stade de la recherche et développement comme dans tout le processus d'un projet dans les bureaux d'ingénieurs ou dans les services techniques des municipalités.

8.3.2 Les limites des travaux

Les algorithmes proposés donnent des résultats satisfaisants en peu de temps de calcul. Le schéma de Godunov utilisé dans la résolution dans ces algorithmes est un schéma volume fini d'ordre 1 pour la résolution des équations différentielles partielles. Appliqués à un réseau d'une multitude de canalisations de configuration complexe, quelques modifications devront être apportées aux algorithmes développés afin d'améliorer le temps de calcul. Ainsi on pourra résoudre les équations développées avec des schémas d'ordre supérieur tels que MUSCL (*Monotonic Upstream-Centered Scheme for Conservation Laws*) ou le schéma beaucoup plus précis PPM (*Piecewise Parabolic Method*). Cela nécessitera la reconstruction plus fine des variables à l'intérieur des cellules de calcul et obtenir une estimation plus précise aux interfaces.

BIBLIOGRAPHIE

- Aklonis, J., MacKnight, W., and Shen, M. (1972). "Introduction to Polymer Viscoelasticity." *John Wiley & Sons, Inc, New York*.
- Aklonis, J., MacKnight, W., and Shen, M. (1972). "Introduction to Polymer Viscoelasticity." *New York*, 481.
- Allievi, L. (1903). "Teoria generale del moto perturbato dell'acqua nei tubi in pressione,". *Ann. Soc. Ing. Arch. Italiana (French translation by Allievi (1904, Revue de mécanique))*.
- Allievi, L. (1913). *Teoria del colpo d'ariete*, Tipografia della R. Accademia dei Lincei.
- Allievi, L. (1932). *Il colpo d'ariete e la regolazione delle turbine*, Industrie grafiche italiane Stucchi.
- Anderson, A. (1976). "Menabrea's note on waterhammer: 1858." *Journal of the Hydraulics Division*, 102(1), 29-39.
- Azhdari Moghaddam, M. (2004). "ANALYSIS AND DESIGN OF A SIMPLE SURGE TANK (RESEARCH NOTE)." *International Journal of Engineering-Transactions A: Basics*, 17(4), 339.
- Bergant, A., Ross Simpson, A., and Vitkovsk, J. (2001). "Developments in unsteady pipe flow friction modelling." *Journal of Hydraulic Research*, 39(3), 249-257.
- Bergant, A., Tijsseling, A. S., Vítkovský, J. P., Covas, D. I., Simpson, A. R., and Lambert, M. F. (2008a). "Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing—Part 1: Mathematical tools." *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 373-381.
- Bergant, A., Tijsseling, A. S., Vítkovský, J. P., Covas, D. I., Simpson, A. R., and Lambert, M. F. (2008b). "Parameters affecting water-hammer wave attenuation, shape and timing—Part 2: Case studies." *Journal of Hydraulic Research*, 46(3), 382-391.
- Bousso, S., and Fuamba, M. (2013). "Numerical simulation of unsteady friction in transient two-phase flow with Godunov method." *Journal of Water Resource and Protection*, 5(11), 1048.
- Brunone, B., and Berni, A. (2010). "Wall shear stress in transient turbulent pipe flow by local velocity measurement." *Journal of Hydraulic Engineering*, 136(10), 716-726.
- Brunone, B., Golia, U., and Greco, M. "Modelling of fast transients by numerical methods." *Proc., Proc. Int. Conf. on Hydr. Transients With Water Column Separation*, 273-280.
- Chaudhry, M. (1987). "Applied Hydraulic Transients." *Van Nostrana Reinhold Co., New York*.
- Chaudhry, M. H., Sabbah, M. A., and Fowler, J. E. (1985). "Analysis and stability of closed surge tanks." *Journal of Hydraulic Engineering*, 111(7), 1079-1096.
- Chaudhry, M. H., and Silvaaraya, W. F. (1992). *STABILITY DIAGRAMS FOR CLOSED SURGE TANKS*.
- Clamond, D. (2009). "Efficient resolution of the Colebrook equation." *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 48(7), 3665-3671.

- Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E., Jeffrey, D. J., and Knuth, D. E. (1996). "On the LambertW function." *Advances in Computational mathematics*, 5(1), 329-359.
- Corless, R. M., Jeffrey, D. J., and Knuth, D. E. "A sequence of series for the Lambert W function." *Proc., Proceedings of the 1997 international symposium on Symbolic and algebraic computation*, ACM, 197-204.
- Covas, D., Stoianov, I., Mano, J. F., Ramos, H., Graham, N., and Maksimovic, C. (2005). "The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part II—Model development, calibration and verification." *Journal of Hydraulic Research*, 43(1), 56-70.
- Covas, D., Stoianov, I., Ramos, H., Graham, N., and Maksimovic, C. (2004). "The dynamic effect of pipe-wall viscoelasticity in hydraulic transients. Part I—Experimental analysis and creep characterization." *Journal of Hydraulic Research*, 42(5), 517-532.
- Finnemore, E., and Franzini, J. (2002). "Fluid Mechanics with Engineering Applications. Tenth Edition." McGraw-Hill, 2002.
- Florinski, V., Guo, X., Balsara, D., and Meyer, C. (2013). "Magnetohydrodynamic modeling of solar system processes on geodesic grids." *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 205(2), 19.
- Franke, P.-G. (1983). "Computation of unsteady pipe flow with respect to visco-elastic material properties." *Journal of Hydraulic research*, 21(5), 345-353.
- Gallerano, F., and Cannata, G. (2011). "Central WENO scheme for the integral form of contravariant shallow-water equations." *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 67(8), 939-959.
- Gallerano, F., Cannata, G., and Tamburrino, M. (2012). "Upwind WENO scheme for Shallow Water Equations in contravariant formulation." *Computers & Fluids*, 62, 1-12.
- Gally, M., Guney, M., and Rieutord, E. (1979). "An investigation of pressure transients in viscoelastic pipes." *Journal of Fluids Engineering*, 101(4), 495-499.
- Godunov, S. K. (1959). "A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics." *Matematicheskii Sbornik*, 89(3), 271-306.
- Guinot, V. (2003). *Godunov-type schemes: an introduction for engineers*, Elsevier.
- Guinot, V. (2012). *Wave propagation in fluids: models and numerical techniques*, John Wiley & Sons.
- Güney, M. "Waterhammer in viscoelastic pipes where cross-section parameters are time-Dependent." *Proc., Fourth International Conference on Pressure Surges, BHRA, England, UK, Sep*, 21-23.
- Haaland, S. E. (1983). "Simple and explicit formulas for the friction factor in turbulent pipe flow." *Journal of Fluids Engineering*, 105(1), 89-90.
- Harten, A., Engquist, B., Osher, S., and Chakravarthy, S. R. (1987). "Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes, III." *Upwind and High-Resolution Schemes*, Springer, 218-290.
- Hildebrand, F. B. (1962). *Advanced calculus for applications*, Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ.

- Jaeger, C. (1933). "Théorie générale du coup de bélier." Diss. Techn. Wiss. ETH Zürich, Nr. 723, 0000. Ref.: Meyer-Peter, E.; Korref.: Dubs, R.
- Jaeger, C. (1958). *Contribution to the stability theory of systems of surge tanks*, English electric Company Limited.
- Jaeger, C. (1960). "A review of surge-tank stability criteria." *Journal of Basic Engineering*, 82(4), 765-775.
- Jiang, G.-S., and Shu, C.-W. (1995). "Efficient implementation of weighted ENO schemes." DTIC Document.
- Kaszeta, F., and Bond, F. (1980). "The Complex Relationship between Groundwater Velocity and Concentration of Radioactive Contaminants." *Scientific Basis for Nuclear Waste Management*, Springer, 739-745.
- Kim, S.-H. (2010). "Design of surge tank for water supply systems using the impulse response method with the GA algorithm." *Journal of mechanical science and technology*, 24(2), 629-636.
- Lescovich, J. E. (1967). "The Control of Water Hammer by Automatic Valves." *Journal (American Water Works Association)*, 632-644.
- Liu, X.-D., Osher, S., and Chan, T. (1994). "Weighted essentially non-oscillatory schemes." *Journal of computational physics*, 115(1), 200-212.
- Menabrea, L. F. (1858). *Note sur les effets du choc de l'eau dans les conduites*, Mallet-Bachelier.
- Michaud, J. (1878). "Coups de bélier dans les conduites. Étude des moyens employés pour en atténuer les effets." *Bull. Soc. Vaudoise Ing. Arch*, 4(3), 4.
- Michaud, J. (1903). *Intensité des coups de bélier dans les conduites d'eau*, H. Vallotton & Toso.
- Miller, G., and Trebotich, D. (2011). "An embedded boundary method for the Navier–Stokes equations on a time-dependent domain." *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, 7(1), 1-31.
- Osher, S., and Chakravarthy, S. (1984). "High resolution schemes and the entropy condition." *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 21(5), 955-984.
- Park, J. S., Yoon, S.-H., and Kim, C. (2010). "Multi-dimensional limiting process for hyperbolic conservation laws on unstructured grids." *Journal of Computational Physics*, 229(3), 788-812.
- Ramadan, A., and Mustafa, H. (2013). "Surge Tank Design Considerations for Controlling Water Hammer Effects at Hydro-electric Power Plants." *University Bulletin*.
- Rieutord, E. (1982). "Transient response of fluid viscoelastic lines." *Journal of Fluids Engineering*, 104(3), 335-341.
- Rieutord, E., and Blanchard, A. (1979). "Ecoulement non-permanent en conduite viscoelastique—coup de bélier." *J. Hydraul. Res., IAHR*, 17(1), 217-229.
- ROCHE, E. (1975). "Assainissement rural: Protection des conduites de refoulement." *TSM l'Eau, Août-Sept*, 365-378.
- Schnyder, O. (1932). "Über Druckstosse in Rohrleitungen." *Wasserkraft und Wasserwirtschaft*.

- Seck, A., and Fuamba, M. (2015). "Contribution to the Analytical Equation Resolution Using Charts for Analysis and Design of Cylindrical and Conical Open Surge Tanks." *Journal of Water Resource and Protection*, 7(15), 1242.
- Shamloo, H., and Mousavifard, M. (2015). "Numerical simulation of turbulent pipe flow for water hammer." *Journal of Fluids Engineering*, 137(11), 111203.
- Shamloo, H., Norooz, R., and Mousavifard, M. (2015). "A review of one-dimensional unsteady friction models for transient pipe flow." *Cumhuriyet Science Journal*, 36(3), 2278-2288.
- Shu, C.-W. (1998). *Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws*, Springer.
- Streeter, V. L., and Wylie, E. B. (1993). *Fluid transients in systems*, Prentice-Hall.
- Suo, L., and Wylie, E. (1990). "Complex wavespeed and hydraulic transients in viscoelastic pipes." *Journal of fluids engineering*, 112(4), 496-500.
- Titarev, V., and Toro, E. F. (2003). "On the use of TVD fluxes in ENO and WENO schemes." *Technical Report UTM 635, Matematica, University of Trento*
- Toro, E. F. (2001). *Shock-capturing methods for free-surface shallow flows*, Wiley.
- Trikha, A. K. (1975). "An efficient method for simulating frequency-dependent friction in transient liquid flow." *Journal of Fluids Engineering*, 97(1), 97-105.
- Vardy, A., and Brown, J. (2003). "Transient turbulent friction in smooth pipe flows." *Journal of Sound and Vibration*, 259(5), 1011-1036.
- Weinerowska-Bords, K. (2006). "Viscoelastic model of waterhammer in single pipeline-problems and questions." *Archives of Hydro-Engineering and Environmental Mechanics*, 53(4), 331-351.
- Zielke, W. (1968). "Frequency-dependent friction in transient pipe flow." *Journal of basic engineering*, 90(1), 109-115.
- Zijlema, M., and Wesseling, P. (1998). "Higher-order flux-limiting schemes for the finite volume computation of incompressible flow." *International Journal of Computational Fluid Dynamics*, 9(2), 89-109.

ANNEXE A – NOTION DE TERME SOURCE HYPERBOLIQUE

Le terme source peut-être une fonction dépendante d'une combinaison ou non du temps t , de l'espace x et de la variable conservée \mathbf{U} . S'il incorpore en son sein une dérivée partielle traduisant la variation spatiale de la variable conservée $\partial\mathbf{U}/\partial x$, il est appelé alors *terme source hyperbolique* selon plusieurs auteurs tels que Kaszeta et Bond (1980), Guinot (2003), Miller et Trebotich (2011) et, Florinski et al. (2013). Cet attribut *hyperbolique* dont on qualifie le *terme source* est un abus de langage car mathématiquement parlant elle est fausse; il devrait simplement porter le nom de *terme source*.